n 倍角の公式を少し簡単に求めるための記法と演算

@bd_gfngfn

2013 年 12 月 26 日

$\cos nx$ および $\sin nx$ は，任意の $n \in \mathbb{N}^+$ に対して $\cos x$ と $\sin x$ で表すことができます。$n = 1$ のときは言うまでもなく表せており，また $n = k - 1$ で表せると仮定すると加法定理より

$$\cos kx = \cos\left((k-1)\,x\right)\cos x - \sin\left((k-1)\,x\right)\sin x \sin kx \quad = \sin\left((k-1)\,x\right)\cos x + \cos\left((k-1)\,x\right)\sin x$$

なので $n = k$ でも表せて，帰納的に明らかです。これより，$\cos nx$ を $\cos x$ と $\sin x$ で表して

$$\cos nx = \sum_{i,j} a_{ij} \cos^i x \sin^j x$$

であったとすると，この各 a_{ij} を用いて以下のような各項の係数の表をつくることができます。

	1	$\sin x$	$\sin^2 x$	$\ldots$
1	a_{00}	a_{01}	a_{02}	$\ldots$
$\cos x$	a_{10}	a_{11}	a_{12}	$\ldots$
$\cos^2 x$	a_{20}	a_{21}	a_{22}	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

しかし，実際は $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ が成り立つので，一意に表すには $\sin^p x$ は $p = 0, 1$ で事足ります。すなわち以下のような表でよいことになります。

	1	$\sin x$
1	a_{00}	a_{01}
$\cos x$	a_{10}	a_{11}
$\cos^2 x$	a_{20}	a_{21}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

このような縦長の係数の表を**餘弦基準表**と呼ぶことにし，以下のように略記することとします。

a_{00}	a_{01}
a_{10}	a_{11}
a_{20}	a_{21}
$\vdots$	$\vdots$

同様の方法で $\sin nx$ でも餘弦基準表による表示が可能です。$\cos nx$ と $\sin nx$ の餘弦基準表表示をそれぞれ

C_n，S_n とおくと，先ほどの加法定理より $n \in \mathbb{N}^+$ に対し以下のような関係が成り立ちます。

$$C_n = C_{n-1}\cos x - S_{n-1}\sin x \qquad\qquad S_n = S_{n-1}\cos x + C_{n-1}\sin x$$

餘弦基準表を $\cos x$ 倍する処理は，定義より以下のように表全体を下にずらすようにして行なえます。

$$\begin{array}{|cc|} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \\ a_{20} & a_{21} \\ a_{30} & a_{31} \\ \vdots & \vdots \end{array} \xrightarrow{\times\cos x} \begin{array}{|cc|} 0 & 0 \\ a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \\ a_{20} & a_{21} \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

一方，$\sin x$ 倍する処理は，$n \in \mathbb{N}^+$ に対して

$$\begin{aligned} a_{i0}\cos^i x \times \sin x &= a_{i0}\cos^i x \sin x \\ a_{i1}\cos^i x \sin x \times \sin x &= a_{i1}\cos^i x \sin^2 x = a_{i1}\cos^i x\left(1-\cos^2 x\right) = -a_{i1}\cos^{i+2} x + a_{i1}\cos^i x \end{aligned}$$

が成り立つので以下のようになります。

$$\begin{array}{|cc|} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \\ a_{20} & a_{21} \\ a_{30} & a_{31} \\ a_{40} & a_{41} \\ \vdots & \vdots \end{array} \xrightarrow{\times\sin x} \begin{array}{|cc|} a_{01} & a_{00} \\ a_{11} & a_{10} \\ a_{21}-a_{01} & a_{20} \\ a_{31}-a_{11} & a_{30} \\ a_{41}-a_{21} & a_{20} \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

この $\cos x$ 倍と $\sin x$ 倍および通常の加減の演算を用いて，任意の $n \in \mathbb{N}^+$ に対する $\cos nx$ と $\sin nx$ の餘弦基準表を求めることができます。定義より初項は以下のとおりです。

$$C_1 = \begin{array}{|cc|} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array} \qquad\qquad S_1 = \begin{array}{|cc|} 0 & 1 \end{array}$$

本来この表は下に無限に伸びていますが，表記上省略している部分はすべて 0 とします。まずためしに C_2 と S_2 を求めると，以下のような計算により求められます。

$$C_2 = C_1\cos x - S_1\sin x = \begin{array}{|cc|} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}\ \cos x - \begin{array}{|cc|} 0 & 1 \end{array}\ \sin x$$

$$= \begin{array}{|cc|} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array} - \begin{array}{|cc|} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0-1 & 0 \end{array} = \begin{array}{|cc|} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{array}$$

$$S_2 = S_1\cos x + C_1\sin x = \begin{array}{|cc|} 0 & 1 \end{array}\ \cos x + \begin{array}{|cc|} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}\ \sin x$$

$$= \begin{array}{|cc|} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} + \begin{array}{|cc|} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} = \begin{array}{|cc|} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{array}$$

C_2 は $2\cos^2 x - 1$ に，S_2 は $2\sin x\cos x$ にそれぞれ対応し，うまく求められていることが確認できました。
C_3 と S_3 についても

$$C_3 = C_2\cos x - S_2\sin x = \begin{array}{|ll|}\hline -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{array}\ \cos x - \begin{array}{|ll|}\hline 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{array}\ \sin x$$

$$= \begin{array}{|ll|}\hline 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{array} - \begin{array}{|ll|}\hline 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0-0 & 0 \\ 0-2 & 0 \end{array} = \begin{array}{|ll|}\hline 0 & 0 \\ -3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{array}$$

$$S_3 = S_2\cos x + C_2\sin x = \begin{array}{|ll|}\hline 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{array}\ \cos x + \begin{array}{|ll|}\hline -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{array}\ \sin x$$

$$= \begin{array}{|ll|}\hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{array} + \begin{array}{|lr|}\hline 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0-0 & 2 \end{array} = \begin{array}{|lr|}\hline 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{array}$$

やはり C_3 は $4\cos^3 x - 3\cos x$ に，S_3 は $4\cos^2 x\sin x - \sin x = -4\sin^3 x + 3\sin x$ に，それぞれ対応していることがわかります。このように n の小さいものから順に $\cos nx$ と $\sin nx$ を求めていくことができます。普通の数式で地道に計算するより早く済むので，この記法を使ってみてはいかがでしょう？