束論の初歩の初歩

@bd_gfngfn

2014 年 3 月 1 日

万全を期してはいますが内容・植字の正確さは保障しかねます
誤植を見つけられましたら是非ご連絡ください

注意 0.0.1　記法の注意

$\forall x \in A\,(\Phi x)$ は $\forall x\,(x \in A \to \Phi x)$ の省略表記.
また，$\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n \in A\,(\Phi x_1 x_2 \cdots x_n)$ は $\forall x_1 \in A\,(\forall x_2 \in A\,(\cdots \forall x_n \in A\,(\Phi x_1 x_2 \cdots x_n)\cdots))$ の省略表記.

定義 0.0.2　半順序，半順序集合

集合 P の元に対して或る評価演算 $\preccurlyeq$ が定義されていて，

$$\forall x \in P\,(x \preccurlyeq x) \quad \text{反射性} \tag{1}$$
$$\forall x \forall y \in P\,((x \preccurlyeq y \land y \preccurlyeq x) \to x = y) \quad \text{反対称性} \tag{2}$$
$$\forall x \forall y \forall z \in P\,((x \preccurlyeq y \land y \preccurlyeq z) \to x \preccurlyeq z) \quad \text{推移性} \tag{3}$$

を P と $\preccurlyeq$ が満たすならば，P を**半順序集合**，$\preccurlyeq$ を**半順序**という．以降 P は半順序集合を，$\preccurlyeq$ は半順序を表す．

定義 0.0.3　比較可能性，線型順序集合

$x, y \in P$ とする．$x \preccurlyeq y \lor y \preccurlyeq x$ であるとき，x と y は**比較可能**であるという．また，$\forall x \forall y\,(x \preccurlyeq y \lor y \preccurlyeq x)$ を満たす集合 P を**線型順序集合**という．

定義 0.0.4　極大元，極小元，最大元，最小元

$x \in P$ とする．$\forall y \in P\,(x \preccurlyeq y \to y = x)$ を満たす x を P の**極大元**，$\forall y \in P\,(y \preccurlyeq x \to y = x)$ を満たす x を P の**極小元**という．また，$\forall y \in P\,(y \preccurlyeq x)$ を満たす x を P の**最大元**，$\forall y \in P\,(x \preccurlyeq y)$ を満たす x を P の**最小元**という．ブール代数では，最大元は 1，最小元は 0 とそれぞれ書き表す．

定義 0.0.5　上界，下界，上限，下限

$x \in P$ とし，P の或る部分集合 M をとる．すなわち $M \subseteq P$ とする．このとき，$\forall y \in M\,(y \preccurlyeq x)$ なる x を M の上界という．また，$\forall y \in M\,(x \preccurlyeq y)$ なる x を M の上界という．一般に上界下界は一意に存在するわけではないので，ここで M の上界を集めた集合を S_M，M の下界を集めた集合を I_M とそれぞれおく．$x \in S_M \land \forall y \in S_M\,(x \preccurlyeq y)$ なる x，すなわち S_M の最小元を M の**最小上界**または**上限**と呼び，$\sup M$ と書き表す．同様に，$x \in I_M \land \forall y \in I_M\,(y \preccurlyeq x)$ なる x，すなわち I_M の最大元を M の**最大下界**または**下限**と呼び，$\inf M$ と書き表す．

系 0.0.6　上限と下限の定義の命題的表記

$$
\begin{aligned}
x = \sup M &\;\dashv\vdash\; \forall z \in M\,(z \preccurlyeq x) \land \forall y \in P\,(\forall z \in M\,(z \preccurlyeq y) \to x \preccurlyeq y)\\
x = \inf M &\;\dashv\vdash\; \forall z \in M\,(x \preccurlyeq z) \land \forall y \in P\,(\forall z \in M\,(y \preccurlyeq z) \to y \preccurlyeq x)
\end{aligned}
$$

定義 0.0.7　束

$\forall x \forall y \in P\,(\exists z\,(z = \sup\{x, y\}) \land \exists z\,(z = \inf\{x, y\}))$ を満たす P を束という．以下一般の束を L と書き表す．また，記号 $\vee$ (join) と $\wedge$ (meet) を用いて $\sup\{x, y\}$ を $x{\vee}y$，$\inf\{x, y\}$ を $x{\wedge}y$ とそれぞれ書き換える[*1]．半順序集合は一般に Hasse 図と呼ばれる有向グラフの一種で階層的に表現することができるのだが，$x{\vee}y$ は x の点と y の点から上に辿って行って最初に合流する点，$x{\wedge}y$ は x の点と y の点から下に辿って行って最初に合流する点と直感的に理解することができる．

定理 0.0.8　join，meet の導入

束 L について，以下がそれぞれ成り立つ．証明は省略．

$$\forall x \forall y \in L\,(x \preccurlyeq x{\vee}y),\quad \forall x \forall y \in L\,(y \preccurlyeq x{\vee}y) \tag{4}$$

$$\forall x \forall y \forall z \in L\,((x \preccurlyeq z \land y \preccurlyeq z) \to x{\vee}y \preccurlyeq z) \tag{5}$$

$$\forall x \forall y \in L\,(x{\wedge}y \preccurlyeq x),\quad \forall x \forall y \in L\,(x{\wedge}y \preccurlyeq y) \tag{6}$$

$$\forall x \forall y \forall z \in L\,((z \preccurlyeq x \land z \preccurlyeq y) \to z \preccurlyeq x{\wedge}y) \tag{7}$$

定理 0.0.9　半順序と join，meet の同値性

束 L に対し，以下が成り立つ．

$$\forall x \forall y \in L\,(x \preccurlyeq y \leftrightarrow x{\vee}y = y) \tag{8}$$

$$\forall x \forall y \in L\,(x \preccurlyeq y \leftrightarrow x{\wedge}y = x) \tag{9}$$

(8) の証明：

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[x \preccurlyeq y]_{\mathrm{i}} \quad \dfrac{\dfrac{}{\forall x\,(x \preccurlyeq x)}\,(1)}{y \preccurlyeq y}}{x \preccurlyeq y \land y \preccurlyeq y} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x \forall y \forall z\,((x \preccurlyeq z \land y \preccurlyeq z) \to x{\vee}y \preccurlyeq z)}\,(5)}{\forall y \forall z\,((x \preccurlyeq z \land y \preccurlyeq z) \to x{\vee}y \preccurlyeq z)}}{\forall z\,((x \preccurlyeq z \land y \preccurlyeq z) \to x{\vee}y \preccurlyeq z)}}{(x \preccurlyeq y \land y \preccurlyeq y) \to x{\vee}y \preccurlyeq y}}{x{\vee}y \preccurlyeq y} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x \forall y\,(y \preccurlyeq x{\vee}y)}\,(4)}{\forall y\,(y \preccurlyeq x{\vee}y)}}{y \preccurlyeq x{\vee}y}}{x{\vee}y \preccurlyeq y \land y \preccurlyeq x{\vee}y} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x \forall y\,((x \preccurlyeq y \land y \preccurlyeq x) \to x = y)}\,(2)}{\forall u\,((x{\vee}y \preccurlyeq u \land u \preccurlyeq x{\vee}y) \to x{\vee}y = u)}}{(x{\vee}y \preccurlyeq y \land y \preccurlyeq x{\vee}y) \to x{\vee}y = y}}{\dfrac{x{\vee}y = y}{\Pi_1:\ \ x \preccurlyeq y \to x{\vee}y = y}\,\mathrm{i}}
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x \forall y\,(x \preccurlyeq x{\vee}y)}\,(4)}{\forall y\,(x \preccurlyeq x{\vee}y)}}{x \preccurlyeq x{\vee}y} \quad \dfrac{[x{\vee}y = y]_{\mathrm{ii}}}{x{\vee}y \preccurlyeq y}}{x \preccurlyeq x{\vee}y \land x{\vee}y \preccurlyeq y} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x \forall y \forall z\,((x \preccurlyeq y \land y \preccurlyeq z) \to x \preccurlyeq z)}\,(3)}{\forall y \forall z\,((x \preccurlyeq y \land y \preccurlyeq z) \to x \preccurlyeq z)}}{\forall z\,((x \preccurlyeq x{\vee}y \land x{\vee}y \preccurlyeq z) \to x \preccurlyeq z)}}{(x \preccurlyeq x{\vee}y \land x{\vee}y \preccurlyeq y) \to x \preccurlyeq y}}{\dfrac{x \preccurlyeq y}{\Pi_2:\ \ x{\vee}y = y \to x \preccurlyeq y}\,\mathrm{ii}}
$$

[*1] $\land$（連言）や $\lor$（選言）と見間違いやすいが，やや小さい．このような記法が採用されているのはブール代数の都合による．

$$\dfrac{\Pi_1 \qquad \Pi_2}{x \vee y = y \leftrightarrow x \leqslant y} \quad \blacksquare$$

各部分を追って読むとわかるが，このような煩雑な証明木は多くの部分が些末な処理である．核心だけを取り出して読みやすくするため，全称量化を省略してより簡潔に書く方法を以下のように定める．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x \forall y\,(x \leqslant x \vee y)}{\scriptstyle (4)}}{\forall y\,(a \leqslant a \vee y)}}{a \leqslant a \vee b} \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{}{a \leqslant a \vee b}{\scriptstyle (4)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x \forall y\,(y \leqslant x \vee y)}{\scriptstyle (4)}}{\forall y\,(y \leqslant a \vee y)}}{b \leqslant a \vee b} \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{}{b \leqslant a \vee b}{\scriptstyle (4)}$$

$$\dfrac{\dfrac{a \leqslant c \qquad b \leqslant c}{a \leqslant c \wedge b \leqslant c} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x \forall y \forall z\,((x \leqslant z \wedge y \leqslant z) \to x \vee y \leqslant z)}{\scriptstyle (5)}}{\forall y \forall z\,((a \leqslant z \wedge y \leqslant z) \to a \vee y \leqslant z)}}{\forall z\,((a \leqslant z \wedge b \leqslant z) \to a \vee b \leqslant z)}}{(a \leqslant c \wedge b \leqslant c) \to a \vee b \leqslant c}}{a \vee b \leqslant c} \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{a \leqslant c \qquad b \leqslant c}{a \vee b \leqslant c}{\scriptstyle (5)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x \forall y\,(x \wedge y \leqslant x)}{\scriptstyle (6)}}{\forall y\,(a \wedge y \leqslant a)}}{a \wedge b \leqslant a} \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{}{a \wedge b \leqslant a}{\scriptstyle (6)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x \forall y\,(x \wedge y \leqslant y)}{\scriptstyle (6)}}{\forall y\,(a \wedge y \leqslant y)}}{a \wedge b \leqslant b} \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{}{a \wedge b \leqslant b}{\scriptstyle (6)}$$

$$\dfrac{\dfrac{c \leqslant a \qquad c \leqslant b}{c \leqslant a \wedge c \leqslant b} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x \forall y \forall z\,((z \leqslant x \wedge z \leqslant y) \to z \leqslant x \wedge y)}{\scriptstyle (7)}}{\forall y \forall z\,((z \leqslant a \wedge z \leqslant y) \to z \leqslant a \wedge y)}}{\forall z\,((z \leqslant a \wedge z \leqslant b) \to z \leqslant a \wedge b)}}{(c \leqslant a \wedge c \leqslant b) \to c \leqslant a \wedge b}}{c \leqslant a \wedge b} \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{c \leqslant a \qquad c \leqslant b}{c \leqslant a \wedge b}{\scriptstyle (7)}$$

これに基づくと，先ほどの (8) の証明は以下のように書き換えられる．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[x \leqslant y]_{\mathrm{i}} \qquad \dfrac{}{y \leqslant y}{\scriptstyle (1)}}{x \vee y \leqslant y}{\scriptstyle (5)} \qquad \dfrac{}{y \leqslant x \vee y}{\scriptstyle (4)}}{x \vee y = y}{\scriptstyle (2)}}{x \leqslant y \to x \vee y = y}\mathrm{i} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x \leqslant x \vee y}{\scriptstyle (4)} \qquad \dfrac{[x \vee y = y]_{\mathrm{ii}}}{x \vee y \leqslant y}}{x \leqslant y}{\scriptstyle (3)}}{x \vee y = y \to x \leqslant y}\mathrm{ii}}{x \leqslant y \leftrightarrow x \vee y = y} \quad \blacksquare$$

煩雑な証明木とは打って変わった見栄えである．このような簡潔な証明木の方が本質的部分だけ取り出して証明の推論を表せていることは一目瞭然であるから，以降はこの方式のみで証明木を記す．

(9) の証明：(8) と同様なので今のところ省略.

定理 0.0.9 は結局 x と y が比較可能なとき $x\vee y$ は “大きい方”，$x\wedge y$ は “小さい方” である，という直感に合致した結果を表している．定義 0.0.7 で述べた join と meet のグラフ上の意味にも，特殊な場合として合致する．

定理 0.0.10　join の交換性，結合性，吸収性

束 L の任意の元 x，y，z に対し，以下が成り立つ．

$x\vee y = y\vee x$	join の交換性	(10)
$x\vee(y\vee z) = (x\vee y)\vee z$	join の結合性	(11)
$x\vee(x\wedge y) = x$	join の吸収性	(12)

---

(10) は $\{x,y\} = \{y,x\}$ より明らか[*2]．　■

(11) の証明：

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(4)}
\UnaryInfC{$x \leqslant x\vee y$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(4)}
\UnaryInfC{$x\vee y \leqslant (x\vee y)\vee z$}
\RightLabel{(3)}
\BinaryInfC{$x \leqslant (x\vee y)\vee z$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(4)}
\UnaryInfC{$y \leqslant x\vee y$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(4)}
\UnaryInfC{$x\vee y \leqslant (x\vee y)\vee z$}
\RightLabel{(3)}
\BinaryInfC{$y \leqslant (x\vee y)\vee z$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(4)}
\UnaryInfC{$z \leqslant (x\vee y)\vee z$}
\RightLabel{(5)}
\BinaryInfC{$y\vee z \leqslant (x\vee y)\vee z$}
\RightLabel{(5)}
\BinaryInfC{$\Pi_1:\ x\vee(y\vee z) \leqslant (x\vee y)\vee z$}
\end{prooftree}
$$

x，y，z は対称であるから，これらを入れ替えた命題 $z\vee(y\vee x) \leqslant (z\vee y)\vee x$ もまた同様に示すことができ，これを交換性 (10) により交換し Π_2： $(x\vee y)\vee z \leqslant x\vee(y\vee z)$ を得る．

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{Π_1}
\AxiomC{Π_2}
\RightLabel{(2)}
\BinaryInfC{$(x\vee y)\vee z = x\vee(y\vee z)$ \quad ■}
\end{prooftree}
$$

(12) の証明：

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(1)}
\UnaryInfC{$x \leqslant x$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(6)}
\UnaryInfC{$x\wedge y \leqslant x$}
\RightLabel{(5)}
\BinaryInfC{$x\vee(x\wedge y) \leqslant x$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(4)}
\UnaryInfC{$x \leqslant x\vee(x\wedge y)$}
\RightLabel{(2)}
\BinaryInfC{$x\vee(x\wedge y) = x$ \quad ■}
\end{prooftree}
$$

定理 0.0.11　meet の交換性，結合性，吸収性

束 L の任意の元 x，y，z に対し，以下が成り立つ．

$x\wedge y = y\wedge x$	meet の交換性	(13)
$x\wedge(y\wedge z) = (x\wedge y)\wedge z$	meet の結合性	(14)
$x\wedge(x\vee y) = x$	meet の吸収性	(15)

---

(13) はやはり $\{x,y\} = \{y,x\}$ より明らか.

(14) の証明：

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(6)}
\UnaryInfC{$(x\wedge y)\wedge z \leqslant x\wedge y$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(6)}
\UnaryInfC{$x\wedge y \leqslant x$}
\RightLabel{(3)}
\BinaryInfC{$(x\wedge y)\wedge z \leqslant x$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(6)}
\UnaryInfC{$x\wedge y \leqslant y$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(6)}
\UnaryInfC{$(x\wedge y)\wedge z \leqslant x\wedge y$}
\RightLabel{(3)}
\BinaryInfC{$x\wedge y$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(6)}
\UnaryInfC{$(x\wedge y)\wedge z \leqslant z$}
\RightLabel{(7)}
\BinaryInfC{$(x\wedge y)\wedge z$}
\RightLabel{(7)}
\BinaryInfC{$\Pi_1:\ (x\wedge y)\wedge z \leqslant x\wedge(y\wedge z)$}
\end{prooftree}
$$

[*2] $\{x,y\} = \{y,x\}$ は ZFC 公理系の非順序対の定義より示せる．

x，y，z を入れ替えて $(z\wedge y)\wedge x \leqslant z\,(y\wedge x)$ とし，さらに交換性 (13) により交換して Π_2： $x\wedge(y\wedge z) \leqslant (x\wedge y)\wedge z$ を得る．

$$\dfrac{\Pi_1 \qquad \Pi_2}{(x\wedge y)\wedge z = x\wedge(y\wedge z)}{\scriptstyle(2)} \quad \blacksquare$$

(15) の証明：

$$\dfrac{\dfrac{\quad}{x\wedge(x\vee y) \leqslant x}{\scriptstyle(6)} \qquad \dfrac{\dfrac{\quad}{x \leqslant x}{\scriptstyle(1)} \qquad \dfrac{\quad}{x \leqslant x\vee y}{\scriptstyle(4)}}{x \leqslant x\wedge(x\vee y)}{\scriptstyle(7)}}{x\wedge(x\vee y) = x}{\scriptstyle(2)} \quad \blacksquare$$

定理 0.0.12　冪等性，片側分配性

束 L の任意の元 x，y，z に対し，以下が成り立つ．

$$x\vee x = x \qquad \text{join の冪等性} \tag{16}$$

$$x\wedge x = x \qquad \text{meet の冪等性} \tag{17}$$

$$x\vee(y\wedge z) \leqslant (x\vee y)\wedge(x\vee z) \qquad \text{join の片側分配性} \tag{18}$$

$$(x\wedge y)\vee(x\wedge z) \leqslant x\wedge(y\vee z) \qquad \text{meet の片側分配性} \tag{19}$$

(16) は (8) から，(17) は (9) からそれぞれ容易に示せる．

(18) の証明：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\quad}{x \leqslant x\vee y}{\scriptstyle(4)} \qquad \dfrac{\quad}{x \leqslant x\vee z}{\scriptstyle(4)}}{x \leqslant (x\vee y)\wedge(x\vee z)}{\scriptstyle(7)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\quad}{y\wedge z \leqslant y}{\scriptstyle(6)} \qquad \dfrac{\quad}{y \leqslant x\vee y}{\scriptstyle(4)}}{y\wedge z \leqslant x\vee y}{\scriptstyle(3)} \qquad \dfrac{\dfrac{\quad}{y\wedge z \leqslant z}{\scriptstyle(6)} \qquad \dfrac{\quad}{z \leqslant x\vee z}{\scriptstyle(4)}}{y\wedge z \leqslant x\vee z}{\scriptstyle(3)}}{y\wedge z \leqslant (x\vee y)\wedge(x\vee z)}{\scriptstyle(7)}}{x\vee(y\wedge z) \leqslant (x\vee y)\wedge(x\vee z)}{\scriptstyle(5)} \quad \blacksquare$$

(19) の証明：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\quad}{x\wedge y \leqslant x}{\scriptstyle(6)} \qquad \dfrac{\quad}{x\wedge z \leqslant x}{\scriptstyle(6)}}{(x\wedge y)\vee(x\wedge z) \leqslant x}{\scriptstyle(5)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\quad}{x\wedge y \leqslant y}{\scriptstyle(6)} \qquad \dfrac{\quad}{y \leqslant y\vee z}{\scriptstyle(4)}}{x\wedge y \leqslant y\vee z}{\scriptstyle(3)} \qquad \dfrac{\dfrac{\quad}{x\wedge z \leqslant z}{\scriptstyle(6)} \qquad \dfrac{\quad}{z \leqslant y\vee z}{\scriptstyle(4)}}{x\wedge \leqslant y\vee z}{\scriptstyle(3)}}{(x\wedge y)\vee(x\wedge z) \leqslant y\vee z}{\scriptstyle(5)}}{(x\wedge y)\vee(x\wedge z) \leqslant x\wedge(y\vee z)}{\scriptstyle(7)} \quad \blacksquare$$

定義 0.0.13　分配束

$$\forall x\forall y\forall z \in L\,((x\vee y)\wedge(x\vee z) \leqslant x\vee(y\wedge z)) \tag{20}$$

$$\forall x\forall y\forall z \in L\,(x\wedge(y\vee z) \leqslant (x\wedge y)\vee(x\wedge z)) \tag{21}$$

を満たす束 L を**分配束**という．　すでに示したように一般の束について (18) および (19) が成り立つので，(20) と (21) はこれらと合わせて反対称性 (2) より結局分配束 L は

$$\forall x\forall y\forall z \in L\,((x\vee y)\wedge(x\vee z) = x\vee(y\wedge z)) \qquad \text{join の分配性} \tag{22}$$

$$\forall x\forall y\forall z \in L\,(x\wedge(y\vee z) = (x\wedge y)\vee(x\wedge z)) \qquad \text{meet の分配性} \tag{23}$$

を満たすということになる．