単純型なし λ 計算のデータ領域理論

@bd_gfngfn

2015 年 2 月 1 日

目次

§1 概要 2

§2 単純型なし λ 計算 3
2.1 構文の定義 3
2.2 操作の定義 4

§3 領域理論 5
3.1 代数の基礎 5
3.2 完備半順序集合と ep 対 6
3.3 領域 D_∞ の構成 10
3.4 Φ, Ψ の構成 16
3.5 Scott モデル 19

§4 参考文献 20

§1 概要

計算論にはいくつもの定式化があるが，このうち講義では触れられなかった単純型なし λ 計算について，その意味論の対象領域である**データ領域** D_∞ を構成することを試みる．λ 計算には，同一の λ 項が，或る時は計算される対象である“値”のように振る舞い，或る時は計算方式の記述である“函数”のように振る舞うという両義性がある．簡単な例を示すと，有名なのは Church 数と呼ばれる自然数の λ 項によるエンコーディングである．自然数 n に対応する λ 項 $\overline{\boldsymbol{n}}$ を

$$\overline{\boldsymbol{n}} \equiv (\lambda \mathtt{s}.\ (\lambda \mathtt{x}.\ (\underbrace{\mathtt{s}(\cdots(\mathtt{s}}_{n}\,\mathtt{x})\cdots))))$$

と定めると，これ自体が自然数 n を表す“値”となる一方，第 1 引数にとった函数を第 2 引数に n 回適用する“高階函数”にも使用できる．実際，このエンコーディングに基づく乗算 $\underline{\mathbf{mult}}$ は

$$\underline{\mathbf{mult}} \equiv (\lambda \mathtt{x}.\ (\lambda \mathtt{y}.\ (\lambda \mathtt{z}.\ (\mathtt{x}(\mathtt{yz})))))$$

と定義され，長いので詳細は省略するが $((\underline{\mathbf{mult}}\,\overline{\boldsymbol{m}})\overline{\boldsymbol{n}}) \xrightarrow[\beta]{} \overline{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}$ であり，この簡約過程で引数の $\overline{\boldsymbol{m}}$ はあたかも高階函数であるかのように使用される．

そして，この両義性に基づき，λ 項が“値”として解釈されるときは D の元，“函数”として解釈されるときは D から D への何らかの写像となっているようなデータ領域 D を考えたい．D から D への何らかの写像を $[D \to D]$ と表すとして，λ 項の両義性よりこの D は $D \cong [D \to D]$ を満たす．ここで $[D \to D]$ の元を写像ではなく何らかの写像としているのは D から D への写像全体 D^D が一般に D より濃度が大きく同型とならないためである．つまり λ 項で“函数”として表現できる，Church-Turing の提題の意味で計算可能な写像全体 $[D \to D]$ は D から D への写像全体 D^D の“ごく一部”なのである．

以上をもとに，λ 項全体の集合を $\boldsymbol{\Lambda}$ として，自由変項の付値 $\rho\colon \mathbf{Var} \to D$ とそれに基づいた λ 項の解釈 $[\![\bullet]\!]_\rho\colon \boldsymbol{\Lambda} \to D$ を，パターンマッチ的に

$$\begin{aligned}
\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{Var}.\ \ & [\![\boldsymbol{x}]\!]_\rho = \rho(\boldsymbol{x}) \\
\forall \boldsymbol{M} \forall \boldsymbol{N} \in \boldsymbol{\Lambda}.\ \ & [\![(\boldsymbol{M}\boldsymbol{N})]\!]_\rho = \big(\Phi([\![\boldsymbol{M}]\!]_\rho)\big)\big([\![\boldsymbol{N}]\!]_\rho\big) \\
\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{Var}.\ \forall \boldsymbol{M} \in \boldsymbol{\Lambda}.\ \ & [\![(\lambda \boldsymbol{x}.\ \boldsymbol{M})]\!]_\rho = \Psi\big(\bar{\lambda} \boldsymbol{d} \in D.\ \big([\![\boldsymbol{M}]\!]_{\rho[\boldsymbol{x}\mapsto \boldsymbol{d}]}\big)\big)
\end{aligned}$$

と定められるように何らかの全単射 $\Phi\colon D \to [D \to D]$ を用いて数学的に記述したいというわけである．Φ は“値としての解釈”から“函数としての解釈”への写像，$\Psi = \Phi^{-1}$ は“函数としての解釈”から“値としての解釈”への写像である．このような D に適合するものとして，D_∞ を構成する．

$$\boldsymbol{\Lambda} \xrightarrow{[\![\bullet]\!]_\rho} D \underset{\Psi}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} [D \to D]$$

近年は以前に増してプログラミング言語や計算機の挙動の意味論が熱心に研究されており，Kleisli 圏など圏論を駆使したアプローチも盛んに行なわれているが，それを記述し研究するには私がまだ充分な理解に達していないので，まずは集合論的に記述することを試みた．

§2 単純型なしλ計算

2.1 構文の定義

定義 2.1.1 λ項

変数記号全体の集合を $\mathbf{Var}$ とし，記号列であるλ項の集合 $\boldsymbol{\Lambda}$ を

$$\begin{gathered}\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{Var}.\ \ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Lambda} \\ \forall \boldsymbol{M} \forall \boldsymbol{N} \in \boldsymbol{\Lambda}.\ \ \mathtt{(}\boldsymbol{M}\boldsymbol{N}\mathtt{)} \in \boldsymbol{\Lambda} \\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{Var}.\ \forall \boldsymbol{M} \in \boldsymbol{\Lambda}.\ \ \mathtt{(}\lambda\boldsymbol{x}\mathtt{.}\ \boldsymbol{M}\mathtt{)} \in \boldsymbol{\Lambda}\end{gathered}$$

を満たす $\boldsymbol{\Lambda}$ のうち包含関係に関して最小のものとして定める．

補足　λ項の記述は，青色が通常の記号，赤色がメタ変数である．端的に言えば，赤色のメタ変数には何らかの青色の具体的な変項が“入る”．例えば $\mathtt{(}\lambda\boldsymbol{x}\mathtt{.}\ \boldsymbol{M}\mathtt{)}$ は $\mathtt{(\lambda y.\ (y(xx)))}$ や $\mathtt{(\lambda x.\ (x(\lambda y.\ x)))}$ などの具体的なλ項を総括して表現している．

定義 2.1.2 自由出現，自由変項

λ項 $\boldsymbol{M}$ に対して，$\boldsymbol{M}$ に**自由出現**する変項全体の集合 $\mathrm{FV}(\boldsymbol{M}) \subseteq \mathbf{Var}$ をパターンマッチで帰納的に

$$\begin{aligned}\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{Var}.&\quad \mathrm{FV}(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{x}\} \\ \forall \boldsymbol{M} \forall \boldsymbol{N} \in \boldsymbol{\Lambda}.&\quad \mathrm{FV}(\mathtt{(}\boldsymbol{M}\boldsymbol{N}\mathtt{)}) = \mathrm{FV}(\boldsymbol{M}) \cup \mathrm{FV}(\boldsymbol{N}) \\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{Var}.\ \forall \boldsymbol{M} \in \boldsymbol{\Lambda}.&\quad \mathrm{FV}(\mathtt{(}\lambda\boldsymbol{x}\mathtt{.}\ \boldsymbol{M}\mathtt{)}) = \mathrm{FV}(\boldsymbol{M}) \setminus \{\boldsymbol{x}\}\end{aligned}$$

と定める．また，$\boldsymbol{M}$ に自由出現する変項を $\boldsymbol{M}$ の**自由変項**と呼ぶ．

補足　例えば $\mathtt{(\lambda x.\ (xy))}$ の自由変項の集合は

$$\mathrm{FV}(\mathtt{(\lambda x.\ (xy))}) = \mathrm{FV}(\mathtt{(xy)}) \setminus \{\mathtt{x}\} = \big(\mathrm{FV}(\mathtt{x}) \cup \mathrm{FV}(\mathtt{y})\big) \setminus \{\mathtt{x}\} = \big(\{\mathtt{x}\} \cup \{\mathtt{y}\}\big) \setminus \{\mathtt{x}\} = \{\mathtt{y}\}$$

と帰納的に求められる．

定義 2.1.3 束縛出現，束縛変項

λ項 $\boldsymbol{M}$ に対して，$\boldsymbol{M}$ に**束縛出現**する変項全体の集合 $\mathrm{BV}(\boldsymbol{M}) \subseteq \mathbf{Var}$ をパターンマッチで帰納的に

$$\begin{aligned}\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{Var}.&\quad \mathrm{BV}(\boldsymbol{x}) = \varnothing \\ \forall \boldsymbol{M} \forall \boldsymbol{N} \in \boldsymbol{\Lambda}.&\quad \mathrm{BV}(\mathtt{(}\boldsymbol{M}\boldsymbol{N}\mathtt{)}) = \mathrm{BV}(\boldsymbol{M}) \cup \mathrm{BV}(\boldsymbol{N}) \\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{Var}.\ \forall \boldsymbol{M} \in \boldsymbol{\Lambda}.&\quad \mathrm{BV}(\mathtt{(}\lambda\boldsymbol{x}\mathtt{.}\ \boldsymbol{M}\mathtt{)}) = \mathrm{BV}(\boldsymbol{M}) \cup \{\boldsymbol{x}\}\end{aligned}$$

と定める．また，$\boldsymbol{M}$ に束縛出現する変項を $\boldsymbol{M}$ の**束縛変項**と呼ぶ．

定義 2.1.4 置換

$\boldsymbol{x} \in \mathbf{Var}$，$\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N} \in \boldsymbol{\Lambda}$ とする．$\boldsymbol{M}$ 中の $\boldsymbol{x}$ の自由出現をすべて $\boldsymbol{N}$ に置き換えたλ項を $[\boldsymbol{N}/\boldsymbol{x}]\boldsymbol{M}$ と表す．

より正確には，以下のようにパターンマッチで帰納的に

$$\begin{aligned}
&\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{Var}.\ \forall \boldsymbol{N} \in \boldsymbol{\Lambda}.\ \ [\boldsymbol{N}/\boldsymbol{x}]\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{N} \\
&\forall \boldsymbol{x}\forall \boldsymbol{y} \in \mathbf{Var}.\ \forall \boldsymbol{N} \in \boldsymbol{\Lambda}.\ \big(\boldsymbol{y} \not\equiv \boldsymbol{x} \ \Rightarrow\ [\boldsymbol{N}/\boldsymbol{x}]\boldsymbol{y} \equiv \boldsymbol{y}\big) \\
&\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{Var}.\ \forall \boldsymbol{N}\forall \boldsymbol{P}\forall \boldsymbol{Q} \in \boldsymbol{\Lambda}.\ \ [\boldsymbol{N}/\boldsymbol{x}]\mathtt{(}\boldsymbol{PQ}\mathtt{)} \equiv \mathtt{(}[\boldsymbol{N}/\boldsymbol{x}]\boldsymbol{P}[\boldsymbol{N}/\boldsymbol{x}]\boldsymbol{Q}\mathtt{)} \\
&\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{Var}.\ \forall \boldsymbol{N}\forall \boldsymbol{M} \in \boldsymbol{\Lambda}.\ \ [\boldsymbol{N}/\boldsymbol{x}]\mathtt{(}\lambda\boldsymbol{x}\mathtt{.}\ \boldsymbol{M}\mathtt{)} \equiv \mathtt{(}\lambda\boldsymbol{x}\mathtt{.}\ \boldsymbol{M}\mathtt{)} \\
&\forall \boldsymbol{x}\forall \boldsymbol{y} \in \mathbf{Var}.\ \forall \boldsymbol{N}\forall \boldsymbol{M} \in \boldsymbol{\Lambda}.\ \big(\boldsymbol{y} \not\equiv \boldsymbol{x} \ \Rightarrow\ [\boldsymbol{N}/\boldsymbol{x}]\mathtt{(}\lambda\boldsymbol{y}\mathtt{.}\ \boldsymbol{M}\mathtt{)} \equiv \mathtt{(}\lambda\boldsymbol{y}\mathtt{.}\ [\boldsymbol{N}/\boldsymbol{x}]\boldsymbol{M}\mathtt{)}\big)
\end{aligned}$$

と定める．

補足　例えば $[\mathtt{(zz)}/\mathtt{x}]\mathtt{(}\lambda\mathtt{y.\ (yx))}$ は

$$\begin{aligned}
[\mathtt{(zz)}/\mathtt{x}]\mathtt{(}\lambda\mathtt{y.\ (yx))} &\equiv \mathtt{(}\lambda\mathtt{y.}\ [\mathtt{(zz)}/\mathtt{x}]\mathtt{(yx))} \\
&\equiv \mathtt{(}\lambda\mathtt{y.\ (}[\mathtt{(zz)}/\mathtt{x}]\mathtt{y}[\mathtt{(zz)}/\mathtt{x}]\mathtt{x))} \\
&\equiv \mathtt{(}\lambda\mathtt{y.\ (y(zz)))}
\end{aligned}$$

である．

2.2 操作の定義

定義 2.2.1　α 変換，α 同値

$\boldsymbol{x} \in \mathbf{Var}$，$\boldsymbol{M} \in \boldsymbol{\Lambda}$ に対して

$$\mathtt{(}\lambda\boldsymbol{x}\mathtt{.}\ \boldsymbol{M}\mathtt{)} \xrightarrow[\alpha]{} \mathtt{(}\lambda\boldsymbol{y}\mathtt{.}\ [\boldsymbol{y}/\boldsymbol{x}]\boldsymbol{M}\mathtt{)}$$

なる操作 $\xrightarrow[\alpha]{}$ を α **変換**と呼ぶ．また，$\xrightarrow[\alpha]{}$ の反射推移閉包を $\xrightarrow[\alpha]{*}$ として $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N} \in \boldsymbol{\Lambda}$ が $\boldsymbol{M} \xrightarrow[\alpha]{*} \boldsymbol{N}$ を満たすとき，$\boldsymbol{M}$ と $\boldsymbol{N}$ は α **同値**であるという．

定義 2.2.2　β 簡約，β 同値

$\boldsymbol{x} \in \mathbf{Var}$，$\boldsymbol{M} \in \boldsymbol{\Lambda}$ に対して

$$\mathtt{((}\lambda\boldsymbol{x}\mathtt{.}\ \boldsymbol{M}\mathtt{)}\boldsymbol{N}\mathtt{)} \xrightarrow[\beta]{} \mathtt{(}[\boldsymbol{N}/\boldsymbol{x}]\boldsymbol{M}\mathtt{)}$$

なる操作 $\xrightarrow[\beta]{}$ を β **簡約**と呼ぶ．ただし，$\boldsymbol{N}$ の自由変項のうちいずれかが置換によって $[\boldsymbol{N}/\boldsymbol{x}]\boldsymbol{M}$ で束縛出現することになる場合は不正であり，β 簡約を適用することはできない．また，$\xrightarrow[\beta]{}$ の反射推移閉包を $\xrightarrow[\beta]{*}$ として $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N} \in \boldsymbol{\Lambda}$ が $\boldsymbol{M} \xrightarrow[\beta]{*} \boldsymbol{N}$ を満たすとき，$\boldsymbol{M}$ と $\boldsymbol{N}$ は β **同値**であるという．

補足　単純型なし λ 計算に於いて，“計算”を定式化した記号操作はこの β 簡約のみであり，α 変換は“表記の都合上 β 簡約できない関数適用”を計算するための副次的な処置である．このほか η **簡約**を定義することもあるが，ここでは考えないものとする．

§3 領域理論

3.1 代数の基礎

定義 3.1.1 二項関係

集合 X，Y に対し $R \subseteq X \times Y$ なる集合 R を X と Y の上の**二項関係**と呼ぶ．特に X と X の上の二項関係は，単に X 上の二項関係と呼ぶ．$x \in X$，$y \in Y$ に対し，$(x, y) \in R$ を $x \mathrel{R} y$ と中置記法の述語に見せかけるような糖衣構文で書く．

定義 3.1.2 写像

集合 X と Y の上の二項関係 F が

$$\begin{gathered} \forall x \in X.\ \exists y \in Y.\ \ x \mathrel{F} y \\ \forall x \in X.\ \forall y_1 \forall y_2 \in Y.\ (x \mathrel{F} y_1 \ \land\ x \mathrel{F} y_2 \ \Rightarrow\ y_1 = y_2) \end{gathered}$$

を満たすとき，F を X から Y への**写像**と呼び，F が X から Y への写像であることを $F : X \to Y$ と書く．この定義より $x \in X$ に対して $x \mathrel{F} y$ なる $y \in Y$ が一意的に存在し，このような y を $F(x)$ と書く．

定義 3.1.3 無名函数記法

v を X の元を指す変数とし，P を 変数 v に依存して表現される，Y の元を指す式とする．v の指す元を P の指す元へ写す X から Y への写像を，λ 項に倣って $\bar{\lambda} v \in X.\ P$ と書くことにし，この記法を**無名函数記法**と呼ぶことにする[*1]．例えば実数の自乗を返す函数は $(\bar{\lambda} x \in \mathbf{R}.\ x^2) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ と書けて，$(\bar{\lambda} x \in \mathbf{R}.\ x^2)(3) = 9$ である．

定義 3.1.4 半順序，半順序集合

集合 P 上の二項関係 $\preccurlyeq$ が

$$\begin{gathered} \forall x \in P.\ \ x \preccurlyeq x \\ \forall x \forall y \in P.\ (x \preccurlyeq y \ \land\ y \preccurlyeq x \ \Rightarrow\ x = y) \\ \forall x \forall y \forall z \in P.\ (x \preccurlyeq y \ \land\ y \preccurlyeq z \ \Rightarrow\ x \preccurlyeq z) \end{gathered}$$

を満たすとき，$\preccurlyeq$ を P 上の**半順序**と呼び，$(P, \preccurlyeq)$ を**半順序集合**と呼ぶ．

定義 3.1.5 上界，上限

半順序集合 $(P, \preccurlyeq)$ と集合 $S \subseteq P$ に対し，

$$\forall u \in P.\ (u \in U \ \Leftrightarrow\ \forall x \in S.\ \ x \preccurlyeq u)$$

で定められる集合 $U \subseteq P$ を，$(P, \preccurlyeq)$ に於ける S の**上界**と呼ぶ．また，U が $\preccurlyeq$ に関して最小元 m をもつとき，すなわち

$$\exists m \in U.\ \forall u \in U.\ \ m \preccurlyeq u$$

[*1] これはローカルな記法で，世間ではあまり見かけない．「無名函数記法」はこの文書で便宜的に使うために私がつけた名称である．

が成り立つとき，この m を S の**上限**と呼ぶ．後述する定理 3.1.6 より，上限は存在するならば一意的であるので，$\bigvee S$ と書く．

定理 3.1.6 上限の存在の一意性

半順序集合 $(P, \preccurlyeq)$ と集合 $S \subseteq P$ に対し，上限は存在するならば一意的である．

定義 3.1.7 有向部分集合

半順序集合 $(D, \preccurlyeq)$ と $X \subseteq D$ が

$$\forall x \forall y \in X.\ \exists z \in X.\ (x \preccurlyeq z \ \land \ y \preccurlyeq z)$$

を満たすとき，X を $(D, \preccurlyeq)$ の**有向部分集合**と呼ぶ．

定理 3.1.8

$(D, \preccurlyeq)$ を半順序集合とする．$(D, \preccurlyeq)$ の任意の有向部分集合 X に対し，X の上限 $\bigvee X$ が存在する．

3.2 完備半順序集合と ep 対

定義 3.2.1 完備半順序集合

半順序集合 $(D, \preccurlyeq)$ が最小元 0 をもち，$(D, \preccurlyeq)$ の任意の有向部分集合 X に対し $\bigvee X \in D$ が成り立つとき，$(D, \preccurlyeq)$ を**完備半順序集合**と呼ぶ．

定義 3.2.2 単調性

$(D_1, \underset{1}{\preccurlyeq})$，$(D_2, \underset{2}{\preccurlyeq})$ を半順序集合とし，写像 $f\colon D_1 \to D_2$ が

$$\forall x \forall y \in D_1.\ \left(x \underset{1}{\preccurlyeq} y \ \Rightarrow \ f(x) \underset{2}{\preccurlyeq} f(y)\right)$$

を満たすとき，f は**単調**であるという．

定義 3.2.3 連続性

$(D_1, \underset{1}{\preccurlyeq})$，$(D_2, \underset{2}{\preccurlyeq})$ を完備半順序集合とし，$f\colon D_1 \to D_2$ とする．$(D_1, \underset{1}{\preccurlyeq})$ の任意の有向部分集合 X に対して f による X の像の最大元 $\bigvee_2 f[X]$ が存在して $f(\bigvee_1 X) = \bigvee_2 f[X]$ が成り立つとき，f は**連続**であるという．

補足　λ 項で表現される函数は D^D の“ごく一部”であり，意味論を考える上では“計算可能性”に対応する何らかの制約を写像に設けることになる，ということを冒頭で述べたが，結果から言えばこの連続性こそが“計算可能性”に対応する性質であるらしい．

定理 3.2.4

$(D_1, \underset{1}{\preccurlyeq})$，$(D_2, \underset{2}{\preccurlyeq})$ を完備半順序集合とし，$f\colon D_1 \to D_2$ とする．f が連続ならば，f は単調である．

証明 $x, y \in D_1$ に対し $x \underset{1}{\preccurlyeq} y$ と仮定すると，$\{x,y\}$ は $(D_1, \underset{1}{\preccurlyeq})$ の有向部分集合であり，$y = \bigvee_1 \{x,y\}$ である．f の連続性より

$$f(y) = f\bigl(\textstyle\bigvee_1 \{x,y\}\bigr) = \textstyle\bigvee_2 f\bigl[\{x,y\}\bigr] = \textstyle\bigvee_2 \bigl\{f(x), f(y)\bigr\}$$

すなわち $f(y) = \bigvee_2 \bigl\{f(x), f(y)\bigr\}$ であり，$f(x) \underset{2}{\preccurlyeq} f(y)$ が成り立つ．ゆえに f は単調である． ■

補足 半順序 $\preccurlyeq$ は，データの“詳しさ”に関する順序である，という解釈がある．この解釈の下では，単調な写像とは入力のデータが“詳しい”ほど出力のデータも“詳しく”なる，ということに相当する．より“詳しい”情報を入力としてプログラムに与えると出力も“詳しく”なる，ということは直感に合致する．

定義 3.2.5 函数空間

完備半順序集合 $(D_1, \underset{1}{\preccurlyeq})$，$(D_2, \underset{2}{\preccurlyeq})$ に対し，連続写像 $f\colon D_1 \to D_2$ 全体からなる集合を $(D_1, \underset{1}{\preccurlyeq})$，$(D_2, \underset{2}{\preccurlyeq})$ 間の**函数空間**と呼び，半順序 $\underset{1}{\preccurlyeq}$，$\underset{2}{\preccurlyeq}$ を省略して $[D_1 \to D_2]$ と表す．

定義 3.2.6 函数空間上の二項関係

完備半順序集合 $(D_1, \underset{1}{\preccurlyeq})$，$(D_2, \underset{2}{\preccurlyeq})$ に対し，函数空間 $[D_1 \to D_2]$ 上の二項関係 $\underset{1\to 2}{\preccurlyeq}$ を

$$\forall f \forall g \in [D_1 \to D_2].\ \bigl(f \underset{1\to 2}{\preccurlyeq} g \ \Leftrightarrow\ \forall x \in D_1.\ \ f(x) \underset{2}{\preccurlyeq} g(x)\bigr) \tag{1}$$

で定義する．

定理 3.2.7

完備半順序集合 $(D_1, \underset{1}{\preccurlyeq})$，$(D_2, \underset{2}{\preccurlyeq})$ に対し，函数空間 $[D_1 \to D_2]$ 上の二項関係 $\underset{1\to 2}{\preccurlyeq}$ を定義 3.2.6 の式 (1) で定義すると，$\bigl([D_1 \to D_2], \underset{1\to 2}{\preccurlyeq}\bigr)$ は完備半順序集合である．

証明 $\underset{1\to 2}{\preccurlyeq}$ が $[D_1 \to D_2]$ 上の半順序であることは容易に示せる．よって $\bigl([D_1 \to D_2], \underset{1\to 2}{\preccurlyeq}\bigr)$ は半順序集合である．

次に $\bigl([D_1 \to D_2], \underset{1\to 2}{\preccurlyeq}\bigr)$ が最小元をもつことを示す．D_2 の最小元 0_2 を用いて

$$\begin{array}{cccc} f_0\colon & D_1 & \longrightarrow & D_2 \\ & \Cup & & \Cup \\ & x & \longmapsto & 0_2 \end{array}$$

で f_0 を定義すると，これは $\forall f \in [D_1 \to D_2].\ \forall x \in D_1.\ \ f_0(x) \underset{2}{\preccurlyeq} f(x)$ を満たす．すなわち

$$\forall f \in [D_1 \to D_2].\ \ f_0 \underset{1\to 2}{\preccurlyeq} f$$

が成り立ち，f_0 は $\bigl([D_1 \to D_2], \underset{1\to 2}{\preccurlyeq}\bigr)$ の最小元である．

最後に $\bigl([D_1 \to D_2], \underset{1\to 2}{\preccurlyeq}\bigr)$ の任意の有向部分集合 G に対して $g = \bigvee_{1\to 2} G$ が $g \in [D_1 \to D_2]$ を満たすことを示す．すなわち $g\colon D_1 \to D_2$ が連続であることを示せばよい．$g(x) = \bigvee_2 \bigl\{f(x) \bigm| f \in G\bigr\}$ である．した

がって，f の連続性より $(D_1, \underset{1}{\preccurlyeq})$ の任意の有向部分集合 X に対して

$$
\begin{aligned}
g\bigl(\textstyle\bigvee_1 X\bigr) &= \textstyle\bigvee_2 \bigl\{ f\bigl(\bigvee_1 X\bigr) \bigm| f \in G \bigr\} \\
&= \textstyle\bigvee_2 \bigl\{ \bigvee_2 f[X] \bigm| f \in G \bigr\} \\
&= \textstyle\bigvee_2 \Bigl\{ \bigvee_2 \bigl\{ f(x) \bigm| x \in X \bigr\} \Bigm| f \in G \Bigr\} \\
&= \textstyle\bigvee_2 \bigl\{ f(x) \bigm| x \in X \ \wedge \ f \in G \bigr\} \\
&= \textstyle\bigvee_2 \Bigl\{ \bigvee_2 \bigl\{ f(x) \bigm| f \in G \bigr\} \Bigm| x \in X \Bigr\} \\
&= \textstyle\bigvee_2 \bigl\{ g(x) \bigm| x \in X \bigr\} \\
&= \textstyle\bigvee_2 g[X]
\end{aligned}
$$

が成り立ち，g は連続である．

以上より，$\bigl([D_1 \to D_2], \underset{1\to 2}{\preccurlyeq}\bigr)$ は完備半順序集合である．■

定義 3.2.8 埋め込み，射影，ep 対

$(D_1, \underset{1}{\preccurlyeq})$，$(D_2, \underset{2}{\preccurlyeq})$ を完備半順序集合とし，$\underset{2\to 2}{\preccurlyeq}$ を定義 3.2.6 により定められる函数空間 $[D_2 \to D_2]$ 上の二項関係とする．連続写像 $f' \colon D_1 \to D_2$，$f'' \colon D_2 \to D_1$ が

$$
f'' \circ f' = \mathrm{id}_{D_1} \tag{2}
$$

$$
f' \circ f'' \underset{2\to 2}{\preccurlyeq} \mathrm{id}_{D_2} \tag{3}
$$

をともに満たすとき，f' を $(D_1, \underset{1}{\preccurlyeq})$ から $(D_2, \underset{2}{\preccurlyeq})$ への**埋め込み**，f'' を $(D_2, \underset{2}{\preccurlyeq})$ から $(D_1, \underset{1}{\preccurlyeq})$ への**射影**と呼び，埋め込みと射影の対 (f', f'') を $(D_2, \underset{2}{\preccurlyeq})$ から $(D_1, \underset{1}{\preccurlyeq})$ への **ep 対**[*2]と呼ぶ．ep 対自体を f と表すとき，その埋め込みを f^{e}，射影を f^{p} と表して $f = (f^{\mathrm{e}}, f^{\mathrm{p}})$ とする．

定理 3.2.9 ep 対の基本的諸定理

$(D_1, \underset{1}{\preccurlyeq})$，$(D_2, \underset{2}{\preccurlyeq})$ を完備半順序集合，f，g をそれぞれ $(D_1, \underset{1}{\preccurlyeq})$ から $(D_2, \underset{2}{\preccurlyeq})$ への ep 対とする．このとき，以下がそれぞれ成り立つ．

(1) $f^{\mathrm{e}} \colon D_1 \to D_2$ は単射である．
(2) $f^{\mathrm{e}} \underset{1\to 2}{\preccurlyeq} g^{\mathrm{e}} \iff g^{\mathrm{p}} \underset{2\to 1}{\preccurlyeq} f^{\mathrm{p}}$．
(3) $\forall x \in D_1.\ \forall y \in D_2.\ \bigl(f^{\mathrm{e}}(x) \underset{2}{\preccurlyeq} y \iff x \underset{1}{\preccurlyeq} f^{\mathrm{p}}(y)\bigr)$．

証明 [(1)] $\forall x \forall y \in D.\ \bigl(f^{\mathrm{e}}(x) = f^{\mathrm{e}}(y) \ \Rightarrow \ x = y\bigr)$ を示す．$x, y \in D$ に対し $f^{\mathrm{e}}(x) = f^{\mathrm{e}}(y)$ と仮定すると，$f^{\mathrm{p}}\bigl(f^{\mathrm{e}}(x)\bigr) = f^{\mathrm{p}}\bigl(f^{\mathrm{e}}(y)\bigr)$ である．ここで $(f^{\mathrm{e}}, f^{\mathrm{p}})$ が ep 対であることから，定義 3.2.8 式 (2) より

$$
\begin{aligned}
f^{\mathrm{p}}\bigl(f^{\mathrm{e}}(x)\bigr) &= (f^{\mathrm{p}} \circ f^{\mathrm{e}})(x) = \mathrm{id}_D(x) = x \\
f^{\mathrm{p}}\bigl(f^{\mathrm{e}}(y)\bigr) &= (f^{\mathrm{p}} \circ f^{\mathrm{e}})(y) = \mathrm{id}_D(y) = y
\end{aligned}
$$

が成り立ち，ゆえに $x = y$ である．■

*2 ep は embedding（埋め込み）と projection（射影）の頭文字からきている．射影対とも呼ぶ．

[(2)⇒]　$f^{\mathrm{e}} \underset{1\to 2}{\preccurlyeq} g^{\mathrm{e}}$ と仮定すると，

$$g^{\mathrm{p}} = \mathrm{id}_{D_1} \circ g^{\mathrm{p}} = f^{\mathrm{p}} \circ f^{\mathrm{e}} \circ g^{\mathrm{p}} \underset{2\to 1}{\preccurlyeq} f^{\mathrm{p}} \circ g^{\mathrm{e}} \circ g^{\mathrm{p}} = f^{\mathrm{p}} \circ \mathrm{id}_{D_2} = f^{\mathrm{p}}$$

より $g^{\mathrm{p}} \underset{2\to 1}{\preccurlyeq} f^{\mathrm{p}}$ が成り立つ． ■

[(2)⇐]　$g^{\mathrm{p}} \underset{2\to 1}{\preccurlyeq} f^{\mathrm{p}}$ と仮定すると，

$$f^{\mathrm{e}} = f^{\mathrm{e}} \circ \mathrm{id}_{D_1} = f^{\mathrm{e}} \circ g^{\mathrm{p}} \circ g^{\mathrm{e}} \underset{1\to 2}{\preccurlyeq} f^{\mathrm{e}} \circ f^{\mathrm{p}} \circ g^{\mathrm{e}} \underset{1\to 2}{\preccurlyeq} \mathrm{id}_{D_2} \circ g^{\mathrm{e}} = g^{\mathrm{e}}$$

より $f^{\mathrm{e}} \underset{1\to 2}{\preccurlyeq} g^{\mathrm{e}}$ が成り立つ． ■

[(3)⇒]　$x \in D_1$，$y \in D_2$ に対し $f^{\mathrm{e}}(x) \underset{2}{\preccurlyeq} y$ と仮定すると，f^{p} の単調性より $f^{\mathrm{p}}\big(f^{\mathrm{e}}(x)\big) \underset{1}{\preccurlyeq} f^{\mathrm{p}}(y)$ であり，$f^{\mathrm{p}} \circ f^{\mathrm{e}} = \mathrm{id}_{D_1}$ よりすなわち $x = \mathrm{id}_{D_1}(x) \underset{1}{\preccurlyeq} f^{\mathrm{p}}(y)$ が成り立つ． ■

[(3)⇐]　$x \underset{1}{\preccurlyeq} f^{\mathrm{p}}(y)$ と仮定すると，f^{e} の単調性より $f^{\mathrm{e}}(x) \underset{2}{\preccurlyeq} f^{\mathrm{e}}\big(f^{\mathrm{p}}(y)\big) = f^{\mathrm{e}} \circ f^{\mathrm{p}}(y) \underset{2}{\preccurlyeq} \mathrm{id}_{D_2}(x) = x$ が成り立つ． ■

定理 3.2.10 連続写像の合成

$(D_1, \underset{1}{\preccurlyeq})$，$(D_2, \underset{2}{\preccurlyeq})$，$(D_3, \underset{3}{\preccurlyeq})$ を完備半順序集合とし，$f\colon D_1 \to D_2$，$g\colon D_2 \to D_3$ をいずれも連続写像とする．このとき，$g \circ f\colon D_1 \to D_3$ は連続写像である．

証明　$(D_1, \underset{1}{\preccurlyeq})$ の有向部分集合 X に対して，f，g の連続性より

$$(g \circ f)(\textstyle\bigvee_1 X) = g\big(f(\bigvee_1 X)\big) = g(\bigvee_2 f[X]) = \bigvee_3 g\big[f[X]\big] = \bigvee_3 (g \circ f)[X]$$

が成り立つ．ゆえに $g \circ f\colon D_1 \to D_3$ は連続である．

定理 3.2.11 ep 対の合成

$(D_1, \underset{1}{\preccurlyeq})$，$(D_2, \underset{2}{\preccurlyeq})$，$(D_3, \underset{3}{\preccurlyeq})$ を完備半順序集合とし，f を $(D_1, \underset{1}{\preccurlyeq})$ から $(D_2, \underset{2}{\preccurlyeq})$ への ep 対，g を $(D_2, \underset{2}{\preccurlyeq})$ から $(D_3, \underset{3}{\preccurlyeq})$ への ep 対とする．このとき $(g^{\mathrm{e}} \circ f^{\mathrm{e}}, f^{\mathrm{p}} \circ g^{\mathrm{p}})$ は $(D_1, \underset{1}{\preccurlyeq})$ から $(D_2, \underset{2}{\preccurlyeq})$ への ep 対である．

証明　$(f^{\mathrm{e}}, f^{\mathrm{p}})$，$(g^{\mathrm{e}}, g^{\mathrm{p}})$ は ep 対であるから

$$(f^{\mathrm{p}} \circ g^{\mathrm{p}}) \circ (g^{\mathrm{e}} \circ f^{\mathrm{e}}) = f^{\mathrm{p}} \circ (g^{\mathrm{p}} \circ g^{\mathrm{e}}) \circ f^{\mathrm{e}} = f^{\mathrm{p}} \circ \mathrm{id}_{D_2} \circ f^{\mathrm{e}} = f^{\mathrm{p}} \circ f^{\mathrm{e}} = \mathrm{id}_{D_1}$$
$$(g^{\mathrm{e}} \circ f^{\mathrm{e}}) \circ (f^{\mathrm{p}} \circ g^{\mathrm{p}}) = g^{\mathrm{e}} \circ (f^{\mathrm{e}} \circ f^{\mathrm{p}}) \circ g^{\mathrm{p}} \underset{3\to 3}{\preccurlyeq} g^{\mathrm{e}} \circ \mathrm{id}_{D_2} \circ g^{\mathrm{p}} = g^{\mathrm{e}} \circ g^{\mathrm{p}} \underset{3\to 3}{\preccurlyeq} \mathrm{id}_{D_3}$$

がそれぞれ成り立つ．また，f^{e}，f^{p}，g^{e}，g^{p} の連続性から，定理 3.2.10 より $g^{\mathrm{e}} \circ f^{\mathrm{e}}$，$f^{\mathrm{p}} \circ g^{\mathrm{p}}$ はいずれも連続である．ゆえに $(g^{\mathrm{e}} \circ f^{\mathrm{e}}, f^{\mathrm{p}} \circ g^{\mathrm{p}})$ は $(D_1, \underset{1}{\preccurlyeq})$ から $(D_2, \underset{2}{\preccurlyeq})$ への ep 対である． ■

定理 3.2.12

$(A_1, \underset{A1}{\preccurlyeq})$，$(A_2, \underset{A2}{\preccurlyeq})$，$(B_1, \underset{B1}{\preccurlyeq})$，$(B_2, \underset{B2}{\preccurlyeq})$ を完備半順序集合とし，f を $(A_1, \underset{A1}{\preccurlyeq})$ から $(A_2, \underset{A2}{\preccurlyeq})$ への ep 対，g を $(B_1, \underset{B1}{\preccurlyeq})$ から $(B_2, \underset{B2}{\preccurlyeq})$ への ep 対とする．このとき，$\big([A_1 \to B_1], \underset{A1\to B1}{\preccurlyeq}\big)$ から $\big([A_2 \to B_2], \underset{A2\to B2}{\preccurlyeq}\big)$ への ep 対 h が存在する．

証明

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[d, "x"'] & & A_2 \arrow[ll, "f^{\mathrm{p}}"'] \arrow[d, "h'(x)"] \\
B_1 \arrow[rr, "g^{\mathrm{e}}"'] & \circlearrowright & B_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[rr, "f^{\mathrm{e}}"] \arrow[d, "h''(y)"'] & & A_2 \arrow[d, "y"] \\
B_1 & \circlearrowright & B_2 \arrow[ll, "g^{\mathrm{p}}"]
\end{tikzcd}$$

$x \in [A_1 \to B_1]$ および $y \in [A_2 \to B_2]$ に対して上図式をいずれも可換にするような $h'(x)$，$h''(y)$ をそれぞれ考える．すなわち任意の x，y に対して $h'(x) = g^{\mathrm{e}} \circ x \circ f^{\mathrm{p}}$，$h''(y) = g^{\mathrm{p}} \circ y \circ f^{\mathrm{e}}$ なる h'，h'' であり，無名函数記法を用いて

$$h' = \bar{\lambda} x \in [A_1 \to B_1].\ (g^{\mathrm{e}} \circ x \circ f^{\mathrm{p}}) \qquad\qquad h'' = \bar{\lambda} y \in [A_2 \to B_2].\ (g^{\mathrm{p}} \circ y \circ f^{\mathrm{e}})$$

と表せる．$\bigl([A_1 \to B_1], \underset{A1\to B1}{\preccurlyeq}\bigr)$ の有向部分集合 X に対し，g^{e} と f^{p} の連続性より

$$\begin{aligned} h'\bigl(\textstyle\bigvee_{A1\to B1} X\bigr) &= g^{\mathrm{e}} \circ \bigl(\textstyle\bigvee_{A1\to B1} X\bigr) \circ f^{\mathrm{p}} = \textstyle\bigvee_{A2\to B2} \{g^{\mathrm{e}} \circ x \circ f^{\mathrm{p}} \mid x \in X\} \\ &= \textstyle\bigvee_{A2\to B2} \bigl\{h'(x) \bigm| x \in X\bigr\} = \textstyle\bigvee_{A2\to B2} h'[X] \end{aligned}$$

であるから h' は連続，また $\bigl([A_2 \to B_2], \underset{A2\to B2}{\preccurlyeq}\bigr)$ の有向部分集合 Y に対し，g^{p} と f^{e} の連続性より

$$\begin{aligned} h''\bigl(\textstyle\bigvee_{A2\to B2} Y\bigr) &= g^{\mathrm{p}} \circ \bigl(\textstyle\bigvee_{A2\to B2} Y\bigr) \circ f^{\mathrm{e}} = \textstyle\bigvee_{A1\to B1} \{g^{\mathrm{p}} \circ y \circ f^{\mathrm{e}} \mid y \in Y\} \\ &= \textstyle\bigvee_{A1\to B1} \bigl\{h''(y) \bigm| y \in Y\bigr\} = \textstyle\bigvee_{A1\to B1} h''[Y] \end{aligned}$$

であるから h'' は連続である．さらに $x \in [A_1 \to B_1]$ に対して

$$\begin{aligned} (h'' \circ h')(x) &= h''\bigl(h'(x)\bigr) = h''(g^{\mathrm{e}} \circ x \circ f^{\mathrm{p}}) = g^{\mathrm{p}} \circ (g^{\mathrm{e}} \circ x \circ f^{\mathrm{p}}) \circ f^{\mathrm{e}} \\ &= \mathrm{id}_{B_1} \circ x \circ \mathrm{id}_{A_1} = x \end{aligned}$$

より $h'' \circ h' = \mathrm{id}_{[A_1 \to B_1]}$，また $y \in [A_2 \to B_2]$ に対して

$$\begin{aligned} (h' \circ h'')(y) &= h'\bigl(h''(y)\bigr) = h'(g^{\mathrm{p}} \circ y \circ f^{\mathrm{e}}) = g^{\mathrm{e}} \circ (g^{\mathrm{p}} \circ y \circ f^{\mathrm{e}}) \circ f^{\mathrm{p}} \\ &\underset{A2\to B2}{\preccurlyeq} \mathrm{id}_{B_2} \circ y \circ f^{\mathrm{e}} \circ f^{\mathrm{p}} \underset{A2\to B2}{\preccurlyeq} \mathrm{id}_{B_2} \circ y \circ \mathrm{id}_{A_2} = y \end{aligned}$$

より $h' \circ h'' \underset{[A2\to B2]\to[A2\to B2]}{\preccurlyeq} \mathrm{id}_{[A_2 \to B_2]}$ が成り立つ．ゆえに $h \coloneqq (h', h'')$ は $\bigl([A_1 \to A_2], \underset{A1\to A2}{\preccurlyeq}\bigr)$ から $\bigl([B_1 \to B_2], \underset{B1\to B2}{\preccurlyeq}\bigr)$ への ep 対である． ■

3.3 領域 D_∞ の構成

定義 3.3.1

$(D, \preccurlyeq)$ を $D \neq \varnothing$ なる完備半順序集合とし，これをもとに

$$\begin{aligned} (D_0, \underset{0}{\preccurlyeq}) &\coloneqq (D, \preccurlyeq) \\ (D_i, \underset{i}{\preccurlyeq}) &\coloneqq \bigl([D_{i-1} \to D_{i-1}], \underset{i\to i}{\preccurlyeq}\bigr) \qquad\qquad (i \in \mathbf{N}^+) \end{aligned}$$

で帰納的に系列 $\bigl((D_i, \underset{i}{\preccurlyeq})\bigr)_{i\in\mathbf{N}}$ を定める．

<u>定義 3.3.2</u>

$\bigl((D_i, \underset{i}{\preccurlyeq})\bigr)_{i\in\mathbf{N}}$ を定義 3.3.1 により定められる完備半順序集合の系列とする．$(D_0, \underset{0}{\preccurlyeq})$ の最小元 0_0 を用いて，$f'_0\colon D_0 \to D_1$，$f''_0\colon D_1 \to D_0$ をそれぞれ

$$f'_0 \coloneqq \bar{\lambda} x \in D_0.\ (\bar{\lambda} y \in D_0.\ x) \qquad\qquad f''_0 \coloneqq \bar{\lambda} z \in D_1.\ z(0_0)$$

と定める．そして $n \in \mathbf{N}^+$ に対して f'_{n-1}，f''_{n-1} が定義されているとして，定理 3.2.12 に基づき，図式

$$\begin{tikzcd}
D_{n-1} \arrow[d, "x"'] & {[D_{n-1} \to D_{n-1}] = D_n} \arrow[l, "f''_{n-1}"'] \arrow[d, "f'_n(x)"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\
D_{n-1} \arrow[r, "f'_{n-1}"'] & {[D_{n-1} \to D_{n-1}] = D_n}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
D_{n-1} \arrow[r, "f'_{n-1}"] \arrow[d, "f''_n(y)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & {[D_{n-1} \to D_{n-1}] = D_n} \arrow[d, "y"] \\
D_{n-1} & {[D_{n-1} \to D_{n-1}] = D_n} \arrow[l, "f''_{n-1}"]
\end{tikzcd}$$

をそれぞれ可換にするような $f'_n\colon D_n \to D_{n+1}$，$f''_n\colon D_{n+1} \to D_n$ を定める．すなわち

$$f'_n \coloneqq \bar{\lambda} x \in D_n.\ \bigl(f'_{n-1} \circ x \circ f''_{n-1}\bigr) \qquad\qquad f''_n \coloneqq \bar{\lambda} y \in D_{n+1}.\ \bigl(f''_{n-1} \circ y \circ f'_{n-1}\bigr)$$

である．これにより帰納的に $\bigl((f'_i, f''_i)\bigr)_{i\in\mathbf{N}}$ を定義する．

定理 3.3.3

完備半順序集合の系列 $\bigl((D_i, \underset{i}{\preccurlyeq})\bigr)_{i\in\mathbf{N}}$ を定義 3.3.1 に，ep 対の系列 $\bigl((f'_i, f''_i)\bigr)_{i\in\mathbf{N}}$ を定義 3.3.2 に基づいて定める．各 $n \in \mathbf{N}$ に対し，(f'_n, f''_n) は $(D_n, \underset{n}{\preccurlyeq})$ から $(D_{n+1}, \underset{n+1}{\preccurlyeq})$ への ep 対である．

証明　まず $(D_0, \underset{0}{\preccurlyeq})$ の有向部分集合 X に対して

$$f'_0\bigl(\textstyle\bigvee_0 X\bigr) = \bigl(\bar{\lambda} y \in D_0.\ \textstyle\bigvee_0 X\bigr) = \textstyle\bigvee_1 \bigl\{(\bar{\lambda} y \in D_0.\ x) \bigm| x \in X\bigr\} = \textstyle\bigvee_1 f'_0[X]$$

より f'_0 は連続であり，また $(D_1, \underset{1}{\preccurlyeq})$ の有向部分集合 Z に対して

$$f''_0\bigl(\textstyle\bigvee_1 Z\bigr) = \bigl(\textstyle\bigvee_1 Z\bigr)(0_0) = \textstyle\bigvee_0 \bigl\{z(0_0) \bigm| z \in Z\bigr\} = \textstyle\bigvee_0 f''_0[Z]$$

より f''_0 も連続である．$x \in D_0$ に対して

$$(f''_0 \circ f'_0)(x) = f''_0\bigl(f'_0(x)\bigr) = f''_0(\bar{\lambda} y \in D_0.\ x) = (\bar{\lambda} y \in D_0.\ x)(0_0) = x$$

であるから $f''_0 \circ f'_0 = \mathrm{id}_{D_0}$，また $z \in D_1$ に対して

$$(f'_0 \circ f''_0)(z) = f'_0\bigl(f''_0(z)\bigr) = f'_0\bigl(z(0_0)\bigr) = \bigl(\bar{\lambda} y \in D_0.\ z(0_0)\bigr) \underset{1}{\preccurlyeq} z$$

であるから $f'_0 \circ f''_0 \underset{2}{\preccurlyeq} \mathrm{id}_{D_1}$．ゆえに (f'_0, f''_0) は $(D_0, \underset{0}{\preccurlyeq})$ から $(D_1, \underset{1}{\preccurlyeq})$ への ep 対である．以降，定理 3.2.12 により帰納的に $n \in \mathbf{N}^+$ に対して (f'_n, f''_n) は $(D_n, \underset{n}{\preccurlyeq})$ から $(D_{n+1}, \underset{n+1}{\preccurlyeq})$ への ep 対である．■

定義 3.3.4

定義 3.3.2 で定められた f'_n と f''_n は定理 3.3.3 で ep 対であることが示されたので，以後それぞれ f^{e}_n，f^{p}_n と書く．すなわち $n \in \mathbf{N}^+$ に対して

$$
\begin{aligned}
f^{\mathrm{e}}_0 &\coloneqq \bar{\lambda}x \in D_0.\ (\bar{\lambda}z \in D_0.\ x) & \qquad f^{\mathrm{p}}_0 &\coloneqq \bar{\lambda}y \in D_1.\ y(0_0) \\
f^{\mathrm{e}}_n &\coloneqq \bar{\lambda}x \in D_n.\ \bigl(f^{\mathrm{e}}_{n-1} \circ x \circ f^{\mathrm{p}}_{n-1}\bigr) & \qquad f^{\mathrm{p}}_n &\coloneqq \bar{\lambda}y \in D_{n+1}.\ \bigl(f^{\mathrm{p}}_{n-1} \circ y \circ f^{\mathrm{e}}_{n-1}\bigr)
\end{aligned}
$$

である．

定義 3.3.5 領域 D_∞

完備半順序集合の系列 $\bigl((D_n, \underset{n}{\preccurlyeq})\bigr)_{n\in\mathbf{N}}$ とその間の ep 対 $\bigl((f^{\mathrm{e}}_n, f^{\mathrm{p}}_n)\bigr)_{n\in\mathbf{N}}$ に対して

$$
D_\infty \coloneqq \Bigl\{(d_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \prod\nolimits_{n\in\mathbf{N}} D_n \Bigm| \forall n \in \mathbf{N}.\ \ d_n = f^{\mathrm{p}}_n(d_{n+1})\Bigr\}
$$

で D_∞ を定める．また D_∞ 上の関係 $\underset{\infty}{\preccurlyeq}$ を

$$
\forall (d_n)_{n\in\mathbf{N}} \forall (\delta_n)_{n\in\mathbf{N}} \in D_\infty.\ \bigl((d_n)_{n\in\mathbf{N}} \underset{\infty}{\preccurlyeq} (\delta_n)_{n\in\mathbf{N}} \ \Leftrightarrow\ \forall n \in \mathbf{N}.\ \ d_n \underset{n}{\preccurlyeq} \delta_n\bigr)
$$

で定義する．

定理 3.3.6

定義 3.3.5 で定めた D_∞ と $\underset{\infty}{\preccurlyeq}$ に対し，$(D_\infty, \underset{\infty}{\preccurlyeq})$ は完備半順序集合である．

証明 まず $\underset{\infty}{\preccurlyeq}$ が D_∞ 上の半順序であることは，各 $\underset{n}{\preccurlyeq}$ が半順序であることから簡単に示せる．

次に $(D_\infty, \underset{\infty}{\preccurlyeq})$ が最小元を持つことを示す：各 $(D_n, \underset{n}{\preccurlyeq})$ の最小元を 0_n とおくと，$(0_n)_{n\in\mathbf{N}}$ が $(D_\infty, \underset{\infty}{\preccurlyeq})$ の最小元である．

最後に，$(D_\infty, \underset{\infty}{\preccurlyeq})$ の任意の有向部分集合 X に対して $\bigvee_\infty X \in D_\infty$ が成り立つことを示す：X を $(D_\infty, \underset{\infty}{\preccurlyeq})$ の任意の有向部分集合とし，各 $n \in \mathbf{N}$ に対して

$$
X_n \coloneqq \bigl\{d_n \in D_n \bigm| \exists d_0 \in D_0.\ \cdots \exists d_{n-1} \in D_{n-1}.\ \exists d_{n+1} \in D_{n+1}.\ \cdots.\ \ (d_0, \ldots, d_{n-1}, d_n, d_{n+1}, \ldots) \in X\bigr\} \tag{4}
$$

で X_n を定めると，これは $(D_n, \underset{n}{\preccurlyeq})$ の有向部分集合であり，$\bigvee_n X_n \in D_n$ が成り立つ．ここで $(\bigvee_n X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ を考えると，これは $\underset{\infty}{\preccurlyeq}$ の定義より明らかに X の上限である．各 f^{p}_n の連続性より

$$
\begin{aligned}
f^{\mathrm{p}}_n\bigl(\bigvee\nolimits_{n+1} X_{n+1}\bigr) &= \bigvee\nolimits_n f^{\mathrm{p}}_n[X_{n+1}] \\
&= \bigvee\nolimits_n \bigl\{f^{\mathrm{p}}_n(d_{n+1}) \bigm| d_{n+1} \in X_{n+1}\bigr\} \\
&= \bigvee\nolimits_n \{d_n \mid d_n \in X_n\} = \bigvee\nolimits_n X_n
\end{aligned}
$$

である．すなわち $\forall n \in \mathbf{N}.\ \ \bigvee_n X_n = f^{\mathrm{p}}_n\bigl(\bigvee_{n+1} X_{n+1}\bigr)$ を満たし，D_∞ の定義より $(\bigvee_n X_n)_{n\in\mathbf{N}} \in D_\infty$ が成り立つ．

以上より $(D_\infty, \underset{\infty}{\preccurlyeq})$ は完備半順序集合である． ■

定義 3.3.7

各 $n \in \mathbf{N}$ に対して，μ'_n を

$$\begin{array}{cccc} \mu'_n: & D_n & \longrightarrow & D_\infty \\ & \cup\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\shortmid \\ & \delta & \longmapsto & (d_i)_{i\in\mathbf{N}} \end{array}$$

と定める．ただし $(d_i)_{i\in\mathbf{N}}$ の各成分は

$$d_i := \begin{cases} f^{\mathrm{p}}_i \circ f^{\mathrm{p}}_{i+1} \circ \cdots \circ f^{\mathrm{p}}_{n-1}(\delta) & (0 \leq i < n) \\ \delta & (i = n) \\ f^{\mathrm{e}}_{i-1} \circ f^{\mathrm{e}}_{i-2} \circ \cdots \circ f^{\mathrm{e}}_n(\delta) & (i > n) \end{cases}$$

である．また μ''_n を

$$\begin{array}{cccc} \mu''_n: & D_\infty & \longrightarrow & D_n \\ & \cup\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\shortmid \\ & (d_i)_{i\in\mathbf{N}} & \longmapsto & d_n \end{array}$$

と定める．

定理 3.3.8

各 $n \in \mathbf{N}$ に対して定義 3.3.7 で定められる (μ'_n, μ''_n) は $(D_n, \underset{n}{\preccurlyeq})$ から $(D_\infty, \underset{\infty}{\preccurlyeq})$ への ep 対である．

証明　まず $d \in D_n$ に対して $\mu''_n \circ \mu'_n(d) = \mu''\big((\ldots, d, \ldots)\big) = d$ より $\mu''_n \circ \mu'_n = \mathrm{id}_{D_n}$ が成り立つ．

また $(d_i)_{i\in\mathbf{N}} \in D_\infty$ に対して $\mu''_n \circ \mu'_n\big((d_i)_{i\in\mathbf{N}}\big) = \mu''_n(d_n) = (\delta_i)_{i\in\mathbf{N}}$ とすると μ''_n の定義より

$$\delta_i = \begin{cases} f^{\mathrm{p}}_i \circ f^{\mathrm{p}}_{i+1} \circ \cdots \circ f^{\mathrm{p}}_{n-1}(d_n) & (0 \leq i < n) \\ d_n & (i = n) \\ f^{\mathrm{e}}_{i-1} \circ f^{\mathrm{e}}_{i-2} \circ \cdots \circ f^{\mathrm{e}}_n(d_n) & (i > n) \end{cases}$$

である．$0 \leq i < n$ なる i に対しては

$$\begin{aligned} \delta_i &= f^{\mathrm{p}}_i \circ f^{\mathrm{p}}_{i+1} \circ \cdots \circ f^{\mathrm{p}}_{n-1}(d_n) \\ &= f^{\mathrm{p}}_i \circ f^{\mathrm{p}}_{i+1} \circ \cdots (d_{n-1}) \\ &\ \ \vdots \\ &= d_i \end{aligned}$$

より $\delta_i = d_i$ であり，$\delta_i \underset{i}{\preccurlyeq} d_i$ が成り立つ．$i = n$ についても $\delta_n = d_n$ より $\delta_n \underset{n}{\preccurlyeq} d_n$ が成り立つ．$i > n$ に対しては

$$\begin{aligned} \delta_i &= f^{\mathrm{e}}_{i-1} \circ f^{\mathrm{e}}_{i-2} \circ \cdots \circ f^{\mathrm{e}}_n(d_n) \\ &= f^{\mathrm{e}}_{i-1} \circ f^{\mathrm{e}}_{i-2} \circ \cdots \circ f^{\mathrm{e}}_{n+1} \circ f^{\mathrm{e}}_n \circ f^{\mathrm{p}}_n \circ f^{\mathrm{p}}_{n+1} \circ \cdots \circ f^{\mathrm{p}}_{i-1}(d_i) \\ &\underset{i}{\preccurlyeq} f^{\mathrm{e}}_{i-1} \circ f^{\mathrm{e}}_{i-2} \circ \cdots \circ f^{\mathrm{e}}_{n+1} \circ f^{\mathrm{p}}_{n+1} \circ \cdots \circ f^{\mathrm{p}}_{i-1}(d_i) \\ &\ \ \vdots \\ &\underset{i}{\preccurlyeq} f^{\mathrm{e}}_{i-1} \circ f^{\mathrm{p}}_{i-1}(d_i) \underset{i}{\preccurlyeq} d_i \end{aligned}$$

より $\delta_i \underset{i}{\preccurlyeq} d_i$ が成り立つ．したがって $\forall i \in \mathbf{N}.\ d_i \underset{i}{\preccurlyeq} \delta_i$ が成り立ち，$\underset{\infty}{\preccurlyeq}$ の定義より $(\delta_i)_{i\in\mathbf{N}} \underset{\infty}{\preccurlyeq} (d_i)_{i\in\mathbf{N}}$ が成り立つ．ゆえに $\mu' \circ \mu'' \underset{\infty\to\infty}{\preccurlyeq} \mathrm{id}_{D_\infty}$ である．

次に μ'_n の連続性を示す．X_n を $(D_n, \underset{n}{\preccurlyeq})$ の有向部分集合として，$d \in D_{n+1}$ に対し

$$\begin{aligned}
\mu'_n(\textstyle\bigvee_n X_n) \underset{n+1}{\preccurlyeq} d &\iff \textstyle\bigvee_n X_n \underset{n}{\preccurlyeq} \mu''_n(d) \\
&\iff \forall x \in X_n.\ x \underset{n}{\preccurlyeq} \mu''_n(d) \\
&\iff \forall x \in X_n.\ \mu'_n(x) \underset{n+1}{\preccurlyeq} d \\
&\iff \textstyle\bigvee_{n+1}\{\mu'_n(x) \mid x \in X_n\} \underset{n+1}{\preccurlyeq} d
\end{aligned}$$

である．すなわち $\mu'_n(\bigvee_n X_n) \underset{n+1}{\preccurlyeq} d$ と $\bigvee_{n+1}\{\mu'_n(x) \mid x \in X_n\} \underset{n+1}{\preccurlyeq} d$ は同値である．ここで $d := \mu'_n(\bigvee_n X_n)$ を代入すると，$\underset{n+1}{\preccurlyeq}$ の反射律より $\mu'_n(\bigvee_n X_n) \underset{n+1}{\preccurlyeq} \mu'_n(\bigvee_n X_n)$ を満たし，ゆえに

$$\textstyle\bigvee_{n+1}\{\mu'_n(x) \mid x \in X_n\} \underset{n+1}{\preccurlyeq} \mu'_n(\bigvee_n X_n)$$

が成り立つ．さらに $d := \bigvee_{n+1}\{\mu'_n(x) \mid x \in X_n\}$ を代入すると，やはり $\underset{n+1}{\preccurlyeq}$ の反射律より $\bigvee_{n+1}\{\mu'_n(x) \mid x \in X_n\} \underset{n+1}{\preccurlyeq} \bigvee_{n+1}\{\mu'_n(x) \mid x \in X_n\}$ を満たし，ゆえに

$$\mu'_n(\textstyle\bigvee_n X_n) \underset{n+1}{\preccurlyeq} \bigvee_{n+1}\{\mu'_n(x) \mid x \in X_n\}$$

が成り立つ．したがって $\underset{n+1}{\preccurlyeq}$ の反対称律より

$$\mu'_n(\textstyle\bigvee_n X_n) = \bigvee_{n+1}\{\mu'_n(x) \mid x \in X_n\}$$

であり，ゆえに $\mu'_n \colon D_n \to D_\infty$ は連続である．

最後に μ''_n の連続性を示す．X を $(D_\infty, \underset{\infty}{\preccurlyeq})$ の有向部分集合として，各 $n \in \mathbf{N}$ に対して式 (4) で X_n を定めると

$$\textstyle\bigvee_\infty X = (\bigvee_n X_n)_{n\in\mathbf{N}}$$

であり，したがって

$$\mu''_n(\textstyle\bigvee_\infty X) = \bigvee_n X_n = \bigvee_n\{\mu''_n(\boldsymbol{d}) \mid \boldsymbol{d} \in X\}$$

が成り立つ．ゆえに $\mu''_n \colon D_\infty \to D_n$ は連続である． ■

定義 3.3.9

各 $n \in \mathbf{N}$ に対して定義 3.3.7 で定められた (μ'_n, μ''_n) は定理 3.3.8 で ep 対であることが示されたので，以降は $(\mu^{\mathrm{e}}_n, \mu^{\mathrm{p}}_n)$ と書き表す．

定理 3.3.10

以下がそれぞれ成り立つ．

(1) $f^{\mathrm{p}}_n \circ \mu^{\mathrm{p}}_{n+1} = \mu^{\mathrm{p}}_n$.
(2) $\mu^{\mathrm{e}}_{n+1} \circ f^{\mathrm{e}}_n = \mu^{\mathrm{e}}_n$.

証明

$(d_i)_{i\in\mathbf{N}}$ に対して

$$\begin{aligned}\left(f_n^{\mathrm{p}}\circ\mu_{n+1}^{\mathrm{p}}\right)\left((d_i)_{i\in\mathbf{N}}\right)&=f_n^{\mathrm{p}}\left(\mu_{n+1}^{\mathrm{p}}\left((d_i)_{i\in\mathbf{N}}\right)\right)\\&=f_n^{\mathrm{p}}(d_{n+1})=d_n=\mu_n^{\mathrm{p}}\left((d_i)_{i\in\mathbf{N}}\right)\end{aligned}$$

であり，(1) : $f_n^{\mathrm{p}}\circ\mu_{n+1}^{\mathrm{p}}=\mu_n^{\mathrm{p}}$ が成り立つ．また (1) を用いて定理 3.2.11 : ep 対の合成が ep 対であること，また射影に対する埋め込みの一意性，埋め込みに対する射影の一意性より (2) が容易に示せる． ■

$$\begin{tikzcd}
& D_\infty \arrow[dl, shift left, "\mu_n^{\mathrm{p}}"] \arrow[dr, shift left, "\mu_{n+1}^{\mathrm{p}}"] & \\
D_n \arrow[ur, shift left, "\mu_n^{\mathrm{e}}"] \arrow[rr, shift left, "f_n^{\mathrm{e}}"] & & D_{n+1} \arrow[ul, shift left, "\mu_{n+1}^{\mathrm{e}}"] \arrow[ll, shift left, "f_n^{\mathrm{p}}"]
\end{tikzcd}$$

補題 3.3.11

$(\mu_n^{\mathrm{e}}\circ\mu_n^{\mathrm{p}})_{n\in\mathbf{N}}$ は上昇列である．すなわち $\forall n\in\mathbf{N}.\ \mu_n^{\mathrm{e}}\circ\mu_n^{\mathrm{p}}\underset{\infty\to\infty}{\precsim}\mu_{n+1}^{\mathrm{e}}\circ\mu_{n+1}^{\mathrm{p}}$ が成り立つ．

証明　定理 3.3.10 より，$n\in\mathbf{N}$ に対して

$$\begin{aligned}\mu_n^{\mathrm{e}}\circ\mu_n^{\mathrm{p}}&=\left(\mu_{n+1}^{\mathrm{e}}\circ f_n^{\mathrm{e}}\right)\circ\left(f_n^{\mathrm{p}}\circ\mu_{n+1}^{\mathrm{p}}\right)=\mu_{n+1}^{\mathrm{e}}\circ\left(f_n^{\mathrm{e}}\circ f_n^{\mathrm{p}}\right)\circ\mu_{n+1}^{\mathrm{p}}\\&\underset{\infty\to\infty}{\precsim}\mu_{n+1}^{\mathrm{e}}\circ\mathrm{id}_{D_{n+1}}\circ\mu_{n+1}^{\mathrm{p}}=\mu_{n+1}^{\mathrm{e}}\circ\mu_{n+1}^{\mathrm{p}}\end{aligned}$$

であり，$\forall n\in\mathbf{N}.\ \mu_n^{\mathrm{e}}\circ\mu_n^{\mathrm{p}}\underset{\infty\to\infty}{\precsim}\mu_{n+1}^{\mathrm{e}}\circ\mu_{n+1}^{\mathrm{p}}$ が成り立つ． ■

補題 3.3.12

$m\le n$ なる $m,n\in\mathbf{N}$ に対して $\mu_m^{\mathrm{p}}\circ\mu_n^{\mathrm{e}}\circ\mu_n^{\mathrm{p}}=\mu_m^{\mathrm{p}}$ が成り立つ．

証明

$$\begin{aligned}\mu_m^{\mathrm{p}}\circ\mu_n^{\mathrm{e}}\circ\mu_n^{\mathrm{p}}&=\left(f_m^{\mathrm{p}}\circ f_{m+1}^{\mathrm{p}}\circ\cdots\circ f_{n-1}^{\mathrm{p}}\circ\mu_n^{\mathrm{p}}\right)\circ\mu_n^{\mathrm{e}}\circ\mu_n^{\mathrm{p}}\\&=\left(f_m^{\mathrm{p}}\circ f_{m+1}^{\mathrm{p}}\circ\cdots\circ f_{n-1}^{\mathrm{p}}\right)\circ\left(\mu_n^{\mathrm{p}}\circ\mu_n^{\mathrm{e}}\right)\circ\mu_n^{\mathrm{p}}\\&=\left(f_m^{\mathrm{p}}\circ f_{m+1}^{\mathrm{p}}\circ\cdots\circ f_{n-1}^{\mathrm{p}}\right)\circ\mu_n^{\mathrm{p}}\\&=\mu_m^{\mathrm{p}}\end{aligned}$$

より，$\mu_m^{\mathrm{p}}\circ\mu_n^{\mathrm{e}}\circ\mu_n^{\mathrm{p}}=\mu_m^{\mathrm{p}}$ が成り立つ． ■

補題 3.3.13

$m\in\mathbf{N}$ に対して $\mu_m^{\mathrm{p}}\circ\bigvee_{\infty\to\infty}\{\mu_n^{\mathrm{e}}\circ\mu_n^{\mathrm{p}}\mid n\in\mathbf{N}\}=\mu_m^{\mathrm{p}}$ が成り立つ．

証明　補題 3.3.11 より $\left((\mu_n^{\mathrm{e}},\mu_n^{\mathrm{p}})\right)_{n\in\mathbf{N}}$ は上昇列であるから

$$\bigvee\nolimits_{\infty\to\infty}\{\mu_n^{\mathrm{e}}\circ\mu_n^{\mathrm{p}}\mid n\in\mathbf{N}\}=\bigvee\nolimits_{\infty\to\infty}\{\mu_n^{\mathrm{e}}\circ\mu_n^{\mathrm{p}}\mid n\ge m\}$$

である．また μ_m^{p} の連続性より

$$\mu_m^{\mathrm{p}}\circ\bigvee\nolimits_{\infty\to\infty}\{\mu_n^{\mathrm{e}}\circ\mu_n^{\mathrm{p}}\mid n\ge m\}=\bigvee\nolimits_{\infty\to m}\{\mu_m^{\mathrm{p}}\circ\mu_n^{\mathrm{e}}\circ\mu_n^{\mathrm{p}}\mid n\ge m\}$$

が成り立つ．ゆえに補題 3.3.12 より

$$\begin{aligned}\mu_m^{\mathrm{p}} \circ \bigvee_{\infty\to\infty}\{\mu_n^{\mathrm{e}} \circ \mu_n^{\mathrm{p}} \mid n \in \mathbf{N}\} &= \bigvee_{\infty\to m}\{\mu_m^{\mathrm{p}} \circ \mu_n^{\mathrm{e}} \circ \mu_n^{\mathrm{p}} \mid n \geq m\} \\ &= \bigvee_{\infty\to m}\{\mu_m^{\mathrm{p}} \mid n \geq m\} \\ &= \mu_m^{\mathrm{p}}\end{aligned}$$

が成り立つ． ■

定理 3.3.14

$\bigvee_{\infty\to\infty}\{\mu_n^{\mathrm{e}} \circ \mu_n^{\mathrm{p}} \mid n \in \mathbf{N}\} = \mathrm{id}_{D_\infty}$ である．

証明　$u := \bigvee_{\infty\to\infty}\{\mu_n^{\mathrm{e}} \circ \mu_n^{\mathrm{p}} \mid n \in \mathbf{N}\}$ と書き表し，$(d_i)_{i\in\mathbf{N}} \in D_\infty$ に対して $(\delta_i)_{i\in\mathbf{N}} := u\big((d_i)_{i\in\mathbf{N}}\big)$ とすると，補題 3.3.13 より $m \in \mathbf{N}$ に対して $\mu_m^{\mathrm{p}} \circ u = \mu_m^{\mathrm{p}}$ であるから

$$d_m = \mu_m^{\mathrm{p}}\big((d_i)_{i\in\mathbf{N}}\big) = (\mu_m^{\mathrm{p}} \circ u)\big((d_i)_{i\in\mathbf{N}}\big) = \mu_m^{\mathrm{p}}\Big(u\big((d_i)_{i\in\mathbf{N}}\big)\Big) = \mu^{\mathrm{p}}\big((\delta_i)_{i\in\mathbf{N}}\big) = \delta_m$$

が成り立つ．すなわち $\forall m \in \mathbf{N}.\ d_m = \delta_m$ であり，$(d_i)_{i\in\mathbf{N}} = (\delta_i)_{i\in\mathbf{N}}$ であるから $u = \mathrm{id}_{D_\infty}$ が成り立つ．ゆえに $\bigvee_{\infty\to\infty}\{\mu_n^{\mathrm{e}} \circ \mu_n^{\mathrm{p}} \mid n \in \mathbf{N}\} = \mathrm{id}_{D_\infty}$ である． ■

3.4 $\varPhi$，$\varPsi$ の構成

定義 3.4.1

写像 $\varPhi$ を

$$\begin{array}{cccc} \varPhi: & D_\infty & \longrightarrow & [D_\infty \to D_\infty] \\ & \cup & & \cup \\ & (d_n)_{n\in\mathbf{N}} & \longmapsto & \bigvee_{\infty\to\infty}\{\mu_n^{\mathrm{e}} \circ d_{n+1} \circ \mu_n^{\mathrm{p}} \mid n \in \mathbf{N}\} \end{array}$$

で，また写像 $\varPsi$ を

$$\begin{array}{cccc} \varPsi: & [D_\infty \to D_\infty] & \longrightarrow & D_\infty \\ & \cup & & \cup \\ & \boldsymbol{g} & \longmapsto & (g_n)_{n\in\mathbf{N}} \end{array}$$

で定義する．ただし $(g_n)_{i\in\mathbf{N}}$ の各成分は $n \in \mathbf{N}$ に対して

$$g_{n+1} = \mu_n^{\mathrm{p}} \circ \boldsymbol{g} \circ \mu_n^{\mathrm{e}} \qquad\qquad g_0 = f_0^{\mathrm{p}}(g_1)$$

と定める．

補題 3.4.2

$(d_n)_{n\in\mathbf{N}} \in D_\infty$ に対し，$(\mu_n^{\mathrm{e}} \circ d_{n+1} \circ \mu_n^{\mathrm{p}})_{n\in\mathbf{N}}$ は上昇列である．すなわち $\forall n \in \mathbf{N}.\ \mu_n^{\mathrm{e}} \circ d_{n+1} \circ \mu_n^{\mathrm{p}} \underset{\infty\to\infty}{\preccurlyeq} \mu_{n+1}^{\mathrm{e}} \circ d_{n+2} \circ \mu_{n+1}^{\mathrm{p}}$ が成り立つ．

証明　$n \in \mathbf{N}$ に対して

$$
\begin{aligned}
\mu_n^{\mathrm{e}} \circ d_{n+1} \circ \mu_n^{\mathrm{p}} &= \left(\mu_{n+1}^{\mathrm{e}} \circ f_n^{\mathrm{e}}\right) \circ d_{n+1} \circ \left(f_n^{\mathrm{p}} \circ \mu_{n+1}^{\mathrm{p}}\right) && \because \text{定理 } 3.3.10 \\
&= \mu_{n+1}^{\mathrm{e}} \circ f_n^{\mathrm{e}} \circ \left(f_{n+1}^{\mathrm{p}}(d_{n+2})\right) \circ f_n^{\mathrm{p}} \circ \mu_{n+1}^{\mathrm{p}} && \because (d_n)_{n\in\mathbf{N}} \in D_\infty \text{ より } d_{n+1} = f_{n+1}^{\mathrm{p}}(d_{n+2}) \\
&= \mu_{n+1}^{\mathrm{e}} \circ f_n^{\mathrm{e}} \circ \left(f_n^{\mathrm{p}} \circ d_{n+2} \circ f_n^{\mathrm{e}}\right) \circ f_n^{\mathrm{p}} \circ \mu_{n+1}^{\mathrm{p}} && \because f_{n+1}^{\mathrm{p}} \coloneqq \bar{\lambda} y \in D_{n+2}.\ (f_n^{\mathrm{p}} \circ y \circ f_n^{\mathrm{e}}) \\
&= \mu_{n+1}^{\mathrm{e}} \circ \left(f_n^{\mathrm{e}} \circ f_n^{\mathrm{p}}\right) \circ d_{n+2} \circ \left(f_n^{\mathrm{p}} \circ f_n^{\mathrm{e}}\right) \circ \mu_{n+1}^{\mathrm{p}} \\
&\underset{\infty\to\infty}{\preccurlyeq} \mu_{n+1}^{\mathrm{e}} \circ \mathrm{id}_{D_{n+1}} \circ d_{n+2} \circ \mathrm{id}_{D_{n+1}} \circ \mu_{n+1}^{\mathrm{p}} \\
&= \mu_{n+1}^{\mathrm{e}} \circ d_{n+2} \circ \mu_{n+1}^{\mathrm{p}}
\end{aligned}
$$

であるから，$\forall n \in \mathbf{N}.\ \mu_n^{\mathrm{e}} \circ d_{n+1} \circ \mu_n^{\mathrm{p}} \underset{\infty\to\infty}{\preccurlyeq} \mu_{n+1}^{\mathrm{e}} \circ d_{n+2} \circ \mu_{n+1}^{\mathrm{p}}$ が成り立つ． ■

定理 3.4.3

$\boldsymbol{g} \in [D_\infty \to D_\infty]$ に対して $(g_n)_{n\in\mathbf{N}} \coloneqq \Psi(\boldsymbol{g})$ で定められる $(g_n)_{n\in\mathbf{N}} \in D_\infty$ は $\forall n \in \mathbf{N}.\ f_n^{\mathrm{p}}(g_{n+1}) = g_n$ を満たす．

証明　$n \in \mathbf{N}^+$ に対して

$$
\begin{aligned}
f_n^{\mathrm{p}}(g_{n+1}) &= f_{n-1}^{\mathrm{p}} \circ g_{n+1} \circ f_{n-1}^{\mathrm{e}} && \because f_n^{\mathrm{p}} \coloneqq \bar{\lambda} y \in D_{n+1}.\ \left(f_{n-1}^{\mathrm{p}} \circ y \circ f_{n-1}^{\mathrm{e}}\right) \\
&= f_{n-1}^{\mathrm{p}} \circ \left(\mu_n^{\mathrm{p}} \circ \boldsymbol{g} \circ \mu_n^{\mathrm{e}}\right) \circ f_{n-1}^{\mathrm{e}} && \because \Psi \text{ の定義より } g_{n+1} \coloneqq \mu_n^{\mathrm{p}} \circ \boldsymbol{g} \circ \mu_n^{\mathrm{e}} \\
&= \left(f_{n-1}^{\mathrm{p}} \circ \mu_n^{\mathrm{p}}\right) \circ \boldsymbol{g} \circ \left(\mu_n^{\mathrm{e}} \circ f_{n-1}^{\mathrm{e}}\right) \\
&= \mu_{n-1}^{\mathrm{p}} \circ \boldsymbol{g} \circ \mu_{n-1}^{\mathrm{e}} && \because \text{定理 } 3.3.10 \\
&= g_n
\end{aligned}
$$

より成立．$n = 0$ のときは Ψ の定義より $g_0 \coloneqq f_0^{\mathrm{p}}(g_1)$ であり明らか．ゆえに $\forall n \in \mathbf{N}.\ f_n^{\mathrm{p}}(g_{n+1}) = g_n$ が成り立つ． ■

定理 3.4.4

$\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{D_\infty}$.

証明　$\boldsymbol{d} \in D_\infty$ に対して $(\Psi \circ \Phi)(\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{d}$ を示す．$\boldsymbol{d} = (d_n)_{n\in\mathbf{N}}$ とし，$(\delta_n)_{n\in\mathbf{N}} \coloneqq (\Psi \circ \Phi)(\boldsymbol{d})$ とおくと，$n \in \mathbf{N}$ に対して

$$
\begin{aligned}
\delta_{n+1} &= (\Psi \circ \Phi)(\boldsymbol{d}) = \Psi\left(\Phi(\boldsymbol{d})\right) \\
&= \mu_n^{\mathrm{p}} \circ \left(\Phi(\boldsymbol{d})\right) \circ \mu_n^{\mathrm{e}} \\
&= \mu_n^{\mathrm{p}} \circ \left(\bigvee\nolimits_{\infty\to\infty}\{\mu_m^{\mathrm{e}} \circ d_{m+1} \circ \mu_m^{\mathrm{p}} \mid m \in \mathbf{N}\}\right) \circ \mu_n^{\mathrm{e}} \\
&= \mu_n^{\mathrm{p}} \circ \left(\bigvee\nolimits_{\infty\to\infty}\{\mu_m^{\mathrm{e}} \circ d_{m+1} \circ \mu_m^{\mathrm{p}} \mid m \geq n\}\right) \circ \mu_n^{\mathrm{e}} && \because \text{補題 } 3.4.2 \text{ の上昇性} \\
&= \bigvee\nolimits_{\infty\to\infty}\{\mu_n^{\mathrm{p}} \circ \mu_m^{\mathrm{e}} \circ d_{m+1} \circ \mu_m^{\mathrm{p}} \circ \mu_n^{\mathrm{e}} \mid m \geq n\}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ここで $m \geq n$ のとき定理 3.3.10 より

$$
\begin{aligned}
\mu_n^{\mathrm{p}} \circ \mu_m^{\mathrm{e}} &= \left(f_n^{\mathrm{p}} \circ \mu_{n+1}^{\mathrm{p}}\right) \circ \mu_m^{\mathrm{e}} \\
&= \left(f_n^{\mathrm{p}} \circ \left(f_{n+1}^{\mathrm{p}} \circ \mu_{n+2}^{\mathrm{p}}\right)\right) \circ \mu_m^{\mathrm{e}} \\
&\vdots \\
&= f_n^{\mathrm{p}} \circ \cdots \circ f_{m-2}^{\mathrm{p}} \circ f_{m-1}^{\mathrm{p}} \circ \mu_m^{\mathrm{p}} \circ \mu_m^{\mathrm{e}} \\
&= f_n^{\mathrm{p}} \circ \cdots \circ f_{m-2}^{\mathrm{p}} \circ f_{m-1}^{\mathrm{p}} \circ \mathrm{id}_{D_m} \\
&= f_n^{\mathrm{p}} \circ \cdots \circ f_{m-2}^{\mathrm{p}} \circ f_{m-1}^{\mathrm{p}}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\mu_m^{\mathrm{p}} \circ \mu_n^{\mathrm{e}} &= \mu_m^{\mathrm{p}} \circ \left(\mu_{n+1}^{\mathrm{e}} \circ f_n^{\mathrm{e}}\right) \\
&= \mu_m^{\mathrm{p}} \circ \left(\left(\mu_{n+2}^{\mathrm{e}} \circ f_{n+1}^{\mathrm{e}}\right) \circ f_n^{\mathrm{e}}\right) \\
&\vdots \\
&= \mu_m^{\mathrm{p}} \circ \mu_m^{\mathrm{e}} \circ f_{m-1}^{\mathrm{e}} \circ f_{m-2}^{\mathrm{e}} \circ \cdots \circ f_n^{\mathrm{e}} \\
&= \mathrm{id}_{D_m} \circ f_{m-1}^{\mathrm{e}} \circ f_{m-2}^{\mathrm{e}} \circ \cdots \circ f_n^{\mathrm{e}} \\
&= f_{m-1}^{\mathrm{e}} \circ f_{m-2}^{\mathrm{e}} \circ \cdots \circ f_n^{\mathrm{e}}
\end{aligned}
$$

が成り立つから

$$
\begin{aligned}
\delta_{n+1} &= \bigvee\nolimits_{\infty\to\infty}\left\{\left(f_n^{\mathrm{p}} \circ \cdots \circ f_{m-2}^{\mathrm{p}} \circ f_{m-1}^{\mathrm{p}}\right) \circ d_{m+1} \circ \left(f_{m-1}^{\mathrm{e}} \circ f_{m-2}^{\mathrm{e}} \circ \cdots \circ f_n^{\mathrm{e}}\right) \,\middle|\, m \geq n\right\} \\
&= \bigvee\nolimits_{\infty\to\infty}\left\{f_n^{\mathrm{p}} \circ \cdots \circ f_{m-2}^{\mathrm{p}} \circ \left(f_{m-1}^{\mathrm{p}} \circ d_{m+1} \circ f_{m-1}^{\mathrm{e}}\right) \circ f_{m-2}^{\mathrm{e}} \circ \cdots \circ f_n^{\mathrm{e}} \,\middle|\, m \geq n\right\} \\
&= \bigvee\nolimits_{\infty\to\infty}\left\{f_n^{\mathrm{p}} \circ \cdots \circ f_{m-2}^{\mathrm{p}} \circ \left(f_m^{\mathrm{p}}(d_{m+1})\right) \circ f_{m-2}^{\mathrm{e}} \circ \cdots \circ f_n^{\mathrm{e}} \,\middle|\, m \geq n\right\} \\
&= \bigvee\nolimits_{\infty\to\infty}\{f_n^{\mathrm{p}} \circ \cdots \circ f_{m-2}^{\mathrm{p}} \circ d_m \circ f_{m-2}^{\mathrm{e}} \circ \cdots \circ f_n^{\mathrm{e}} \mid m \geq n\} \\
&= \bigvee\nolimits_{\infty\to\infty}\left\{f_n^{\mathrm{p}} \circ \cdots \circ \left(f_{m-2}^{\mathrm{p}} \circ d_m \circ f_{m-2}^{\mathrm{e}}\right) \circ \cdots \circ f_n^{\mathrm{e}} \,\middle|\, m \geq n\right\} \\
&= \bigvee\nolimits_{\infty\to\infty}\left\{f_n^{\mathrm{p}} \circ \cdots \circ \left(f_{m-1}^{\mathrm{p}}(d_m)\right) \circ \cdots \circ f_n^{\mathrm{e}} \,\middle|\, m \geq n\right\} \\
&\vdots \\
&= \bigvee\nolimits_{\infty\to\infty}\{f_n^{\mathrm{p}} \circ d_{n+2} \circ f_n^{\mathrm{e}} \mid m \geq n\} \\
&= \bigvee\nolimits_{\infty\to\infty}\left\{f_{n+1}^{\mathrm{p}}(d_{n+2}) \,\middle|\, m \geq n\right\} \\
&= \bigvee\nolimits_{\infty\to\infty}\{d_{n+1} \mid m \geq n\} \\
&= d_{n+1}
\end{aligned}
$$

であり，$\forall n \in \mathbf{N}.\ \delta_{n+1} = d_{n+1}$ すなわち $\forall n \in \mathbf{N}^+.\ \delta_n = d_n$ が成り立つ．また，これより $\delta_1 = d_1$ であるから，$n = 0$ についても

$$\delta_0 = f_0^{\mathrm{p}}(\delta_1) = f_0^{\mathrm{p}}(d_1) = d_0$$

であり，したがって $\forall n \in \mathbf{N}.\ \delta_n = d_n$ が成り立つ．ゆえに $(\delta_n)_{n\in\mathbf{N}} = (d_n)_{n\in\mathbf{N}}$ であり，$\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{D_\infty}$ が成り立つ． ■

定理 3.4.5

$\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{[D_\infty \to D_\infty]}$.

証明　$\boldsymbol{g} \in [D_\infty \to D_\infty]$ に対して $(\varPhi \circ \varPsi)(\boldsymbol{g}) = \boldsymbol{g}$ を示す．$(\gamma_n)_{n\in\mathbf{N}} := \varPsi(\boldsymbol{g})$ とおくと，

$$\begin{aligned}
(\varPhi \circ \varPsi)(\boldsymbol{g}) &= \varPhi\big(\varPsi(\boldsymbol{g})\big) \\
&= \varPhi\big((\gamma_n)_{n\in\mathbf{N}}\big) \\
&= \textstyle\bigvee_{\infty\to\infty}\{\mu_n^{\mathrm{e}} \circ \gamma_{n+1} \circ \mu_n^{\mathrm{p}} \mid n \in \mathbf{N}\} \\
&= \textstyle\bigvee_{\infty\to\infty}\big\{\mu_n^{\mathrm{e}} \circ (\mu_n^{\mathrm{p}} \circ \boldsymbol{g} \circ \mu_n^{\mathrm{e}}) \circ \mu_n^{\mathrm{p}} \bigm| n \in \mathbf{N}\big\} \\
&= \textstyle\bigvee_{\infty\to\infty}\big\{(\mu_n^{\mathrm{e}} \circ \mu_n^{\mathrm{p}}) \circ \boldsymbol{g} \circ (\mu_n^{\mathrm{e}} \circ \mu_n^{\mathrm{p}}) \bigm| n \in \mathbf{N}\big\} \\
&= \textstyle\bigvee_{\infty\to\infty}\{\mathrm{id}_{D_\infty} \circ \boldsymbol{g} \circ \mathrm{id}_{D_\infty} \mid n \in \mathbf{N}\} \\
&= \textstyle\bigvee_{\infty\to\infty}\{\boldsymbol{g} \mid n \in \mathbf{N}\} \\
&= \boldsymbol{g}
\end{aligned}$$

が成り立つ．ゆえに $\varPhi \circ \varPsi = \mathrm{id}_{[D_\infty \to D_\infty]}$ である．■

補足　定理 3.4.4，定理 3.4.5 より $\varPhi\colon D_\infty \to [D_\infty \to D_\infty]$ と $\varPsi\colon [D_\infty \to D_\infty] \to D_\infty$ は全単射であり，$\varPsi = \varPhi^{-1}$ が成り立つということが示された．

3.5 Scott モデル

定義 3.5.1 付値

$\mathbf{Var}$ の各元に対して D_∞ の元を割り当てた写像 $\rho\colon \mathbf{Var} \to D_\infty$ を付値と呼ぶ．

定義 3.5.2 付値の更新

付値 $\rho\colon \mathbf{Var} \to D_\infty$ を変項 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{Var}$ についてのみ $\boldsymbol{d} \in D_\infty$ を“指す”ように更新したものを $\rho[\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{d}]$ と表す．すなわち

$$\begin{array}{rccc}
\rho[\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{d}]: & \mathbf{Var} & \longrightarrow & D_\infty \\
 & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
 & \boldsymbol{y} & \longmapsto & \begin{cases} \boldsymbol{d} & (\boldsymbol{y} \equiv \boldsymbol{x}) \\ \rho(\boldsymbol{y}) & (\boldsymbol{y} \not\equiv \boldsymbol{x}) \end{cases}
\end{array}$$

と定義する．

定義 3.5.3 Scott モデルによる解釈

λ 項全体の集合を $\boldsymbol{\Lambda}$ として，付値 $\rho\colon \mathbf{Var} \to D_\infty$ とそれに基づいた λ 項の解釈 $[\![\bullet]\!]_\rho\colon \boldsymbol{\Lambda} \to D_\infty$ を，定義 3.4.1 により定められる $\varPhi\colon D_\infty \to [D_\infty \to D_\infty]$ と $\varPsi\colon [D_\infty \to D_\infty] \to D_\infty$ を用いて

$$\begin{aligned}
\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{Var}.\ & [\![\boldsymbol{x}]\!]_\rho = \rho(\boldsymbol{x}) \\
\forall \boldsymbol{M} \forall \boldsymbol{N} \in \boldsymbol{\Lambda}.\ & [\![(\boldsymbol{M}\boldsymbol{N})]\!]_\rho = \big(\varPhi([\![\boldsymbol{M}]\!]_\rho)\big)\big([\![\boldsymbol{N}]\!]_\rho\big) \\
\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{Var}.\ \forall \boldsymbol{M} \in \boldsymbol{\Lambda}.\ & [\![(\lambda \boldsymbol{x}.\ \boldsymbol{M})]\!]_\rho = \varPsi\Big(\big(\bar{\lambda}\boldsymbol{d} \in D_\infty.\ [\![\boldsymbol{M}]\!]_{\rho[\boldsymbol{x}\mapsto\boldsymbol{d}]}\big)\Big)
\end{aligned}$$

と定義する．このように解釈を定義した λ 項の意味論は Scott モデルと呼ばれる．

定理 3.5.4 β 同値性に対する意味の保存

定義 3.5.3 の Scott モデルの下で，$\boldsymbol{P} \underset{\beta}{\longrightarrow} \boldsymbol{Q}$ ならば $[\![\boldsymbol{P}]\!]_\rho = [\![\boldsymbol{Q}]\!]_\rho$ である．すなわち

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{Var}.\ \forall \boldsymbol{M} \forall \boldsymbol{N} \in \boldsymbol{\Lambda}.\ [\![((\lambda \boldsymbol{x}.\ \boldsymbol{M})\boldsymbol{N})]\!]_\rho = [\![[\boldsymbol{N}/\boldsymbol{x}]\boldsymbol{M}]\!]_\rho$$

が成り立つ．

証明　まず $\boldsymbol{x} \in \mathbf{Var}$ と $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N} \in \boldsymbol{\Lambda}$ に対して

$$[\![[\boldsymbol{N}/\boldsymbol{x}]\boldsymbol{M}]\!]_\rho = [\![\boldsymbol{M}]\!]_{\rho\left[\boldsymbol{x} \mapsto [\![\boldsymbol{N}]\!]_\rho\right]}$$

が成り立つ．これは $\boldsymbol{M}$ の構造に関する帰納法により容易に示すことができる．一方で

$$\begin{aligned}
[\![((\lambda \boldsymbol{x}.\ \boldsymbol{M})\boldsymbol{N})]\!]_\rho &= \Big(\varPhi\big([\![(\lambda \boldsymbol{x}.\ \boldsymbol{M})]\!]_\rho\big)\Big)\big([\![\boldsymbol{N}]\!]_\rho\big) \\
&= \Big(\varPhi\Big(\varPsi\Big(\big(\bar{\lambda} \boldsymbol{d} \in D_\infty.\ [\![\boldsymbol{M}]\!]_{\rho[\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{d}]}\big)\Big)\Big)\Big)\big([\![\boldsymbol{N}]\!]_\rho\big) \\
&= \big(\bar{\lambda} \boldsymbol{d} \in D_\infty.\ [\![\boldsymbol{M}]\!]_{\rho[\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{d}]}\big)\big([\![\boldsymbol{N}]\!]_\rho\big) && \because \varPhi \circ \varPsi = \mathrm{id}_{[D_\infty \to D_\infty]} \\
&= [\![\boldsymbol{M}]\!]_{\rho\left[\boldsymbol{x} \mapsto [\![\boldsymbol{N}]\!]_\rho\right]}
\end{aligned}$$

が成り立つ．ゆえに $[\![((\lambda \boldsymbol{x}.\ \boldsymbol{M})\boldsymbol{N})]\!]_\rho = [\![[\boldsymbol{N}/\boldsymbol{x}]\boldsymbol{M}]\!]_\rho$ である．　■

補足　可換図式にすると以下のようになっている：

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{\Lambda} \times \boldsymbol{\Lambda} \arrow[r, "\text{連接}"] \arrow[d, "\left(\varPhi \circ [\![\bullet]\!]_\rho\right) \times [\![\bullet]\!]_\rho"'] & \boldsymbol{\Lambda} \arrow[r, "\beta\ \text{簡約}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \boldsymbol{\Lambda} \arrow[d, "{[\![\bullet]\!]_\rho}"] \\
{[D_\infty \to D_\infty] \times D_\infty} \arrow[rr, "\text{函数適用}"] & & D_\infty
\end{tikzcd}$$

こうして β 同値性に関して保存される，$D_\infty \cong [D_\infty \to D_\infty]$ を満たす対象領域 D_∞ と意味論を定められたことが確認でき，本稿の目的を達成した．実際には目的に応じて完備半順序集合よりも多少弱い条件や強い条件を課したり，単純型つき λ 計算のように型を考慮に入れた領域を構成したりする．その他，λ 計算の体系では非自明な再帰的処理についても，ここで構成された D_∞ をもとに**不動点意味論**という意味論が考察される．

§4 参考文献

- 清水義夫,『記号論理学講義 基礎理論 束論と圏論 知識論』東京大学出版会，2013
- 横内寛文,『プログラム意味論』共立出版，1994
- 大堀淳,『プログラミング言語の基礎理論』共立出版，1997
- 蓮尾一郎，*Introduction to Logic and Computability*, 2014